

# ***OSCILLATORE SINUSOIDALE A RETROAZIONE POSITIVA REALIZZATO CON AMPLIFICATORE OPERAZIONALE***

Sulla base delle considerazioni e delle obiezioni fatte dagli amici della comunità “Grix”, sul primo articolo, si è pensato di affrontare lo studio del nostro “oscillatore” secondo i canoni propri dell’elettronica.

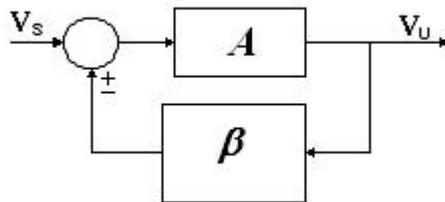
Trattandosi, nello schema, di un nuovo circuito ci preoccuperemo di:

1. verificare che per esso siano rispettate le condizioni di Barkhausen per i sistemi oscillanti;
2. onde meglio comprendere la selettività del circuito, considerare il circuito LC come un filtro passa banda;
3. individuare, per i singoli componenti, dei range di variazione a garanzia di un buon funzionamento circuitale;
4. riportare i risultati dell’analisi sperimentale e con il simulatore Pspice;
5. riportare soltanto nel file allegato, le dimostrazioni matematiche.

Premesso che tutto quanto si può trovare nei “sacri testi” non sarà dimostrato procediamo:

## ***Punto 1 – Criteri di Barkhausen***

Considerato il seguente sistema retroazionato.

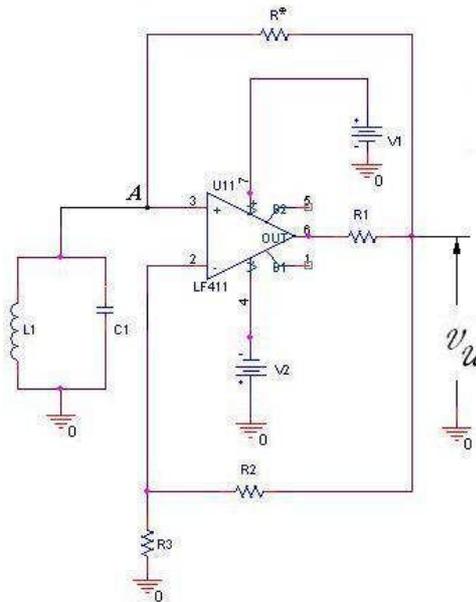


Con  $A$  guadagno della linea diretta e  $\beta$  fattore di retroazione.

Affinchè un sistema retroazionato sia oscillante è necessario “sacri testi” siano verificate le seguenti condizioni:

$$\text{Im}[A \beta ]=0 \text{ e } \text{Re}[A \beta ]=1$$

Consideriamo il nostro sistema nello schema più generale:

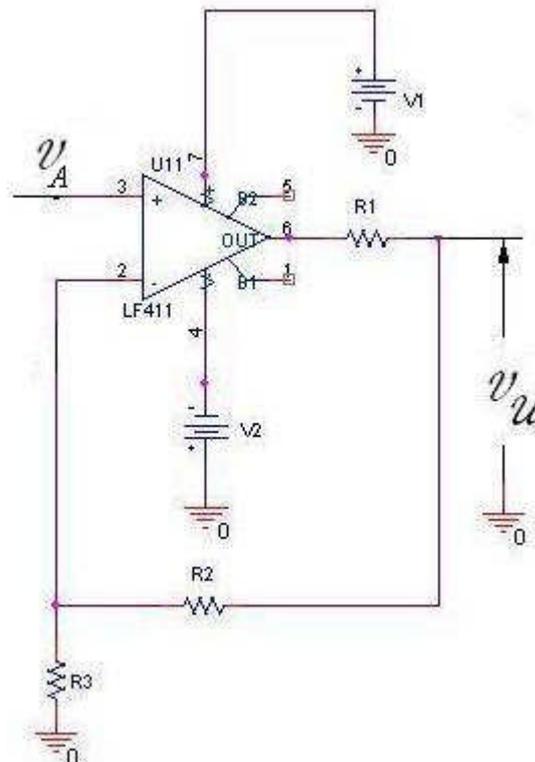


**Supponiamo sia l' A.O. ideale**

Il circuito si può considerare come un Amplificatore Operazionale in configurazione non invertente con un segnale applicato al nodo A; segnale dato da:

$$v_A = v_u \cdot \frac{L // C}{L // C + R^*} = v_u \cdot \frac{j \cdot \omega \cdot C}{\frac{C \cdot R^*}{L} \cdot (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C) - j \cdot \omega \cdot C}$$

per cui il circuito da analizzare, semplificato, diviene:



l'uscita sarà data da:

$$v_u = v_A \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) = v_u \cdot \frac{j \cdot \omega \cdot C}{\frac{C \cdot R^*}{L} \cdot (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C) + j \cdot \omega \cdot C} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)$$

Verifichiamo i criteri di Barkhausen:

- il guadagno A è dato da:  $\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)$ ;
- il fattore di retroazione è dato da:  $\beta = \frac{j \cdot \omega \cdot C}{\frac{C \cdot R^*}{L} \cdot (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C) + j \cdot \omega \cdot C}$

$\text{Im}[A \beta] = 0$  quindi è come dire che l'argomento di  $A \beta$  sia nullo.

Affinchè ciò avvenga basta che la parte immaginaria del numero complesso  $\beta$  si annulli; per ottenere ciò basta che siano nulli  $R^*$  o  $1 - \omega^2 \cdot L \cdot C = 0$  o entrambi.

Infatti con, anche una sola di queste condizioni, otteniamo:

$$\frac{j \cdot \omega \cdot C}{\frac{C \cdot R^*}{L} \cdot (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C) + j \cdot \omega \cdot C} = \frac{j \cdot \omega \cdot C}{j \cdot \omega \cdot C} = 1$$

dalla relazione  $1 - \omega^2 \cdot L \cdot C = 0$  ricaviamo la frequenza d'oscillazione del sistema

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad ; \quad f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

**Osserviamo che  $R^*$ :**

- **sulla condizione di oscillazione non ha alcuna influenza;**
- **alla frequenza di oscillazione  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  non ha neppure influenza sull'ampiezza del segnale di uscita.**

**Per non complicarci la vita e perché ridurre il numero dei componenti, quando si può fare è sempre salutare, la cortocircuitiamo.**

L'altra condizione da verificare è:  $\text{Re}[A \beta] = 1$  alla frequenza di oscillazione  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

$\beta$  calcolato alla frequenza di oscillazione da,

$$\frac{j \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot C}{\frac{C \cdot R^*}{L} \cdot \left(1 - \frac{1}{L \cdot C} \cdot L \cdot C\right) + j \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot C} = 1$$

vale 1  
quindi:

$$R_e[A \cdot \beta] = 1 \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) = 1 + \frac{R_2}{R_3} = 1$$

vera se  $R_2 = 0$

Sappiamo, che in pratica, affinché s'innesci l'oscillazione è necessario che

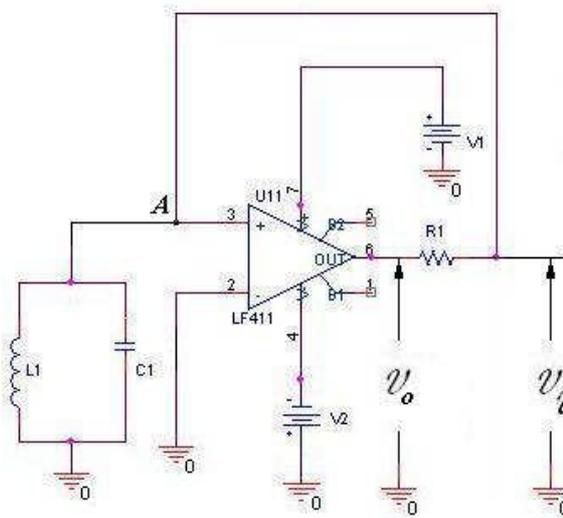
$$R_e[A \cdot \beta] > 1$$

quindi :

$$1 \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) = 1 + \frac{R_2}{R_3} > 1 \quad \text{che da}$$

$$\frac{R_2}{R_3} > 0 \quad \text{da cui deriva che } R_2 > R_3$$

nulla ci vieta di fare  $R_2$  infinitamente grande, semplificando il circuito (**meno componenti circuito più affidabile oltre che meno costoso**), come di seguito indicato:



Avendo verificato le condizioni di **Barkhausen** possiamo asserire che il nostro è **un sistema oscillante**.

### **Punto 2- AZIONE FILTRANTE DEL PASSA BANDA LC**

Premesso che essendoci una retroazione positiva e l'uscita dell'A.O., se operiamo ad una frequenza sufficientemente più piccola della frequenza di taglio superiore dell'A.O., è certamente un'onda quadra:

- se indichiamo con  $v_0$  la tensione massima all'uscita dell'A.O., detta onda quadra, secondo lo sviluppo in serie di Fourier, è data da:

$$v(t) = \frac{4 \cdot v_0}{\pi} \cdot \left( \sin \omega \cdot t + \frac{1}{3} \cdot \sin 3 \cdot \omega \cdot t + \frac{1}{5} \cdot \sin 5 \cdot \omega \cdot t \right) = \frac{4 \cdot v_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{(2 \cdot n - 1)}{2 \cdot n - 1} \cdot \omega \cdot t$$

- il circuito LC si comporta come un filtro passa banda con frequenza di risonanza

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad ; \quad f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

L'impedenza del parallelo "LC" è data da:

$$Z(\omega) = \frac{j \cdot \omega \cdot L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 \cdot L \cdot C}$$

alla frequenza di risonanza  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

$$Z(\omega_0) = \infty$$

possiamo asserire che alla frequenza di risonanza (che è anche la frequenza di oscillazione del nostro oscillatore) il filtro presenta una impedenza infinita ciò vuol dire che:

- la prima armonica si presenta identica a se stessa in uscita;
- le armoniche dalla terza in poi hanno ampiezza ridotta, per loro natura, e perché vengono attenuate dall'azione del filtro visto che la relativa frequenza di oscillazione è multipla di quella di risonanza;

Per quanto sopra, considerando l'A.O. come ideale, in uscita abbiamo la prima armonica dell'onda quadra che, sottolineiamo ha un'ampiezza maggiore dell'onda quadra. Quanto sopra è:

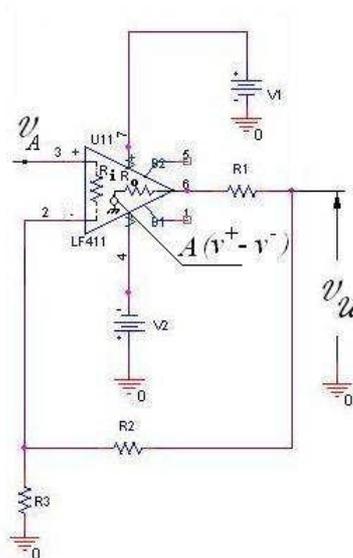
- a) coerente con quanto fornisce il simulatore Pspice;
- b) non coerente con ciò che è stato rilevato sperimentalmente in quanto l'A.O. e il filtro LC sono reali e presentano delle resistenze elettriche che il modello ideale dei componenti trascura.

Approfondimento nel file PDF in allegato B

### ***Punto 3- OSSERVAZIONI SUL VALORE DA ASSEGNARE AI COMPONENTI IL SISTEMA***

#### ***Valore da assegnare a $R_1$***

In questa analisi è necessario considerare l'A.O. come reale. Per le basse frequenze, o almeno fino alle frequenze ove si possono trascurare le reattanze di contatto e quelle distribuite, lo schema è il seguente:



si dimostra che il guadagno (vedi nel files PDF allegato A), considerato che  $v_A \equiv v^+$  è dato da;

$$G = \frac{v_u}{v^+} = \frac{\frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} \cdot \left(\frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} \cdot \left(\frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

**Ricaviamo l'influenza della resistenza  $R_1$  sul guadagno.**

Osserviamo che il parallelo tra le resistenze  $R_i$ ,  $R_2$  e  $R_3$  è più piccolo della più piccola delle tre, cioè di  $R_3$ . Poniamo, in prima approssimazione, il parallelo pari a  $R_3$ ; l'espressione del guadagno si semplifica come segue:

$$G = \frac{\frac{A}{R_1} - \frac{R_3}{R_i} \cdot \left(\frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{R_3}{R_2} \cdot \left(\frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{\frac{1}{R_1} \cdot \left[ A - \frac{R_3}{R_i} \cdot \left( A - \frac{R_1}{R_2} \right) \right]}{\frac{1}{R_1} \cdot \left[ 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_3}{R_2} \cdot \left( A - \frac{R_1}{R_2} \right) \right]}$$

$$G = \frac{\left[ A - \frac{R_3}{R_i} \cdot \left( A - \frac{R_1}{R_2} \right) \right]}{\left[ 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_3}{R_2} \cdot \left( A - \frac{R_1}{R_2} \right) \right]}$$

per quanto già osservato sui valori di  $R_1$  e  $R_2$ , consideriamo i tre casi:

1.  $A \gg \frac{R_1}{R_2}$  trascurando  $\frac{R_1}{R_2}$  rispetto ad  $A$  ci resta:

$$G = \frac{A - \frac{R_3}{R_i} \cdot A}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_3}{R_2} \cdot A}$$

è facile rilevare che al crescere di  $R_1$  il guadagno diminuisce

2. consideriamo (ipotesi esclusivamente teorica) il caso in cui  $\frac{R_1}{R_2} = A$  cioè:  $R_1 = A \cdot R_2$

dalla:

$$G = \frac{\left[ A - \frac{R_3}{R_i} \cdot \left( A - \frac{R_1}{R_2} \right) \right]}{\left[ 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_3}{R_2} \cdot \left( A - \frac{R_1}{R_2} \right) \right]}$$

ci resta:

$$G = \frac{A}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

per cui possiamo asserire che  $R_1$ , crescendo fino al valore sopra indicato fa sempre diminuire il guadagno.

3. infine (altra ipotesi teorica) consideriamo il caso in cui

$$\frac{R_1}{R_2} \gg A$$

tan to da trascurare  $A$  rispetto a  $\frac{R_1}{R_2}$

l'espressione del guadagno diviene:

$$G = \frac{A + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_i \cdot R_2}}{R_1 \cdot \left( \frac{1}{R_2} - \frac{R_3}{R_2^2} \right)} = \frac{\frac{A}{R_2} + \frac{R_3}{R_i} \cdot R_1}{R_1 \cdot \left( 1 - \frac{R_3}{R_2} \right)}$$

siccome  $\frac{R_3}{R_i} \ll \frac{R_3}{R_2}$  al crescere di  $R_1$  il denominatore cresce più del numeratore e il guadagno diminuisce.

***Concludendo poiché al crescere di  $R_1$  il guadagno diminuisce l'ampiezza del segnale di uscita diminuisce.***

***Evidenziamo che ciò si rileva nel circuito sperimentale in quanto nella simulazione con Pspice l'uscita ha l'ampiezza della prima armonica e non risente (entro certi limiti) della variazione di  $R_1$ .***

Parliamo di "certi limiti" perché al crescere di  $R_1$  l'oscillazione può non innescarsi a causa di un transitorio molto lungo. Ciò si può vedere dai risultati dell'analisi del transitorio (in file PDF dimostrazione in allegato C). Infatti, nella sua espressione, di seguito riportata, si può facilmente vedere come al crescere di  $R_1$  aumenti il tempo necessario al relativo spegnimento.

$$v_{u,Tr}(t) = -\frac{4 \cdot V_0}{\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} t} \text{sen} \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \cdot t$$

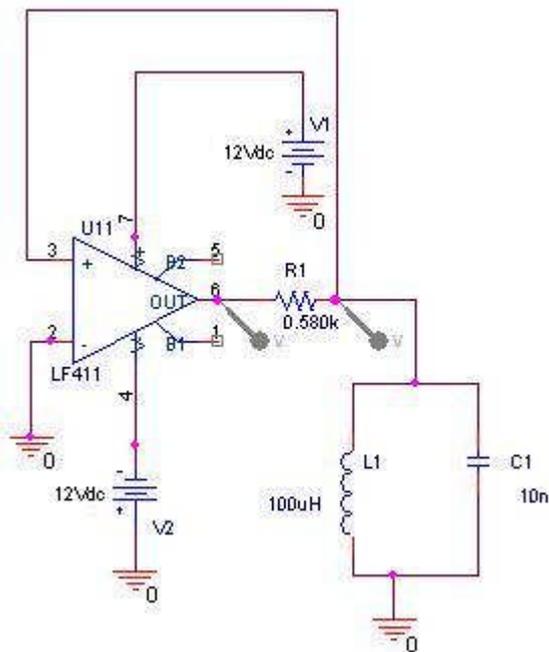
A questo punto passiamo ad alcune osservazioni sugli ordini di grandezza delle resistenze in gioco. Così come riportano i "sacri testi", se si volessero inserire, normalmente  $R_3$  è dell'ordine di  $(0.1 \div 10) K\Omega$  mentre  $R_2$  (e  $R_1$ ) è dell'ordine di  $(1 \div 100) K\Omega$ .

I valori più bassi sono utilizzati con i circuiti più veloci (dai MHz alle centinaia di MHz); i valori più alti sono tipici dei circuiti per frequenze minori (dalla continua alle centinaia di kHz).

La resistenza della sorgente del segnale,  $R_S$ , di solito è un dato esterno, nel nostro caso si può assimilare alla resistenza del parallelo LC per cui si può ipotizzare, in prima approssimazione, pari a zero.

## Punto 4- ANALISI SPERIMENTALE

Lanalisi, con simulatore Pspice e con circuito sperimentale, è stata sviluppata sul seguente circuito semplificato.



Componenti del circuito reale:

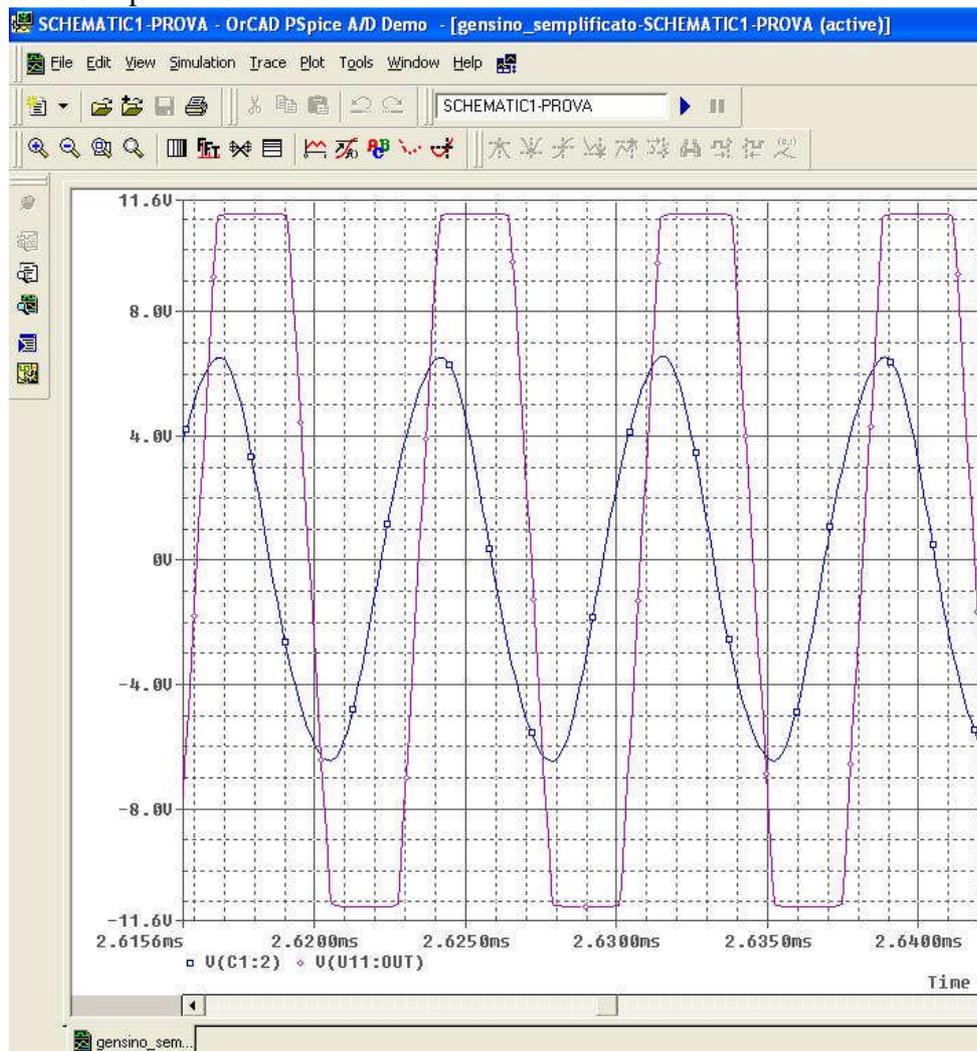
- 1 resistore da 470  $\Omega$  toll. 5%
- 1 condensatore poliestere 10 nF toll. 5% massima tensione applicabile 100 V;
- una induttanza da 100 micro Henry;
- un trimmer da 10K $\Omega$ ;
- due condensatori poliestere da 100 nF

frequenza di risonanza

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{10 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} \cong 159 \text{ KHz}$$

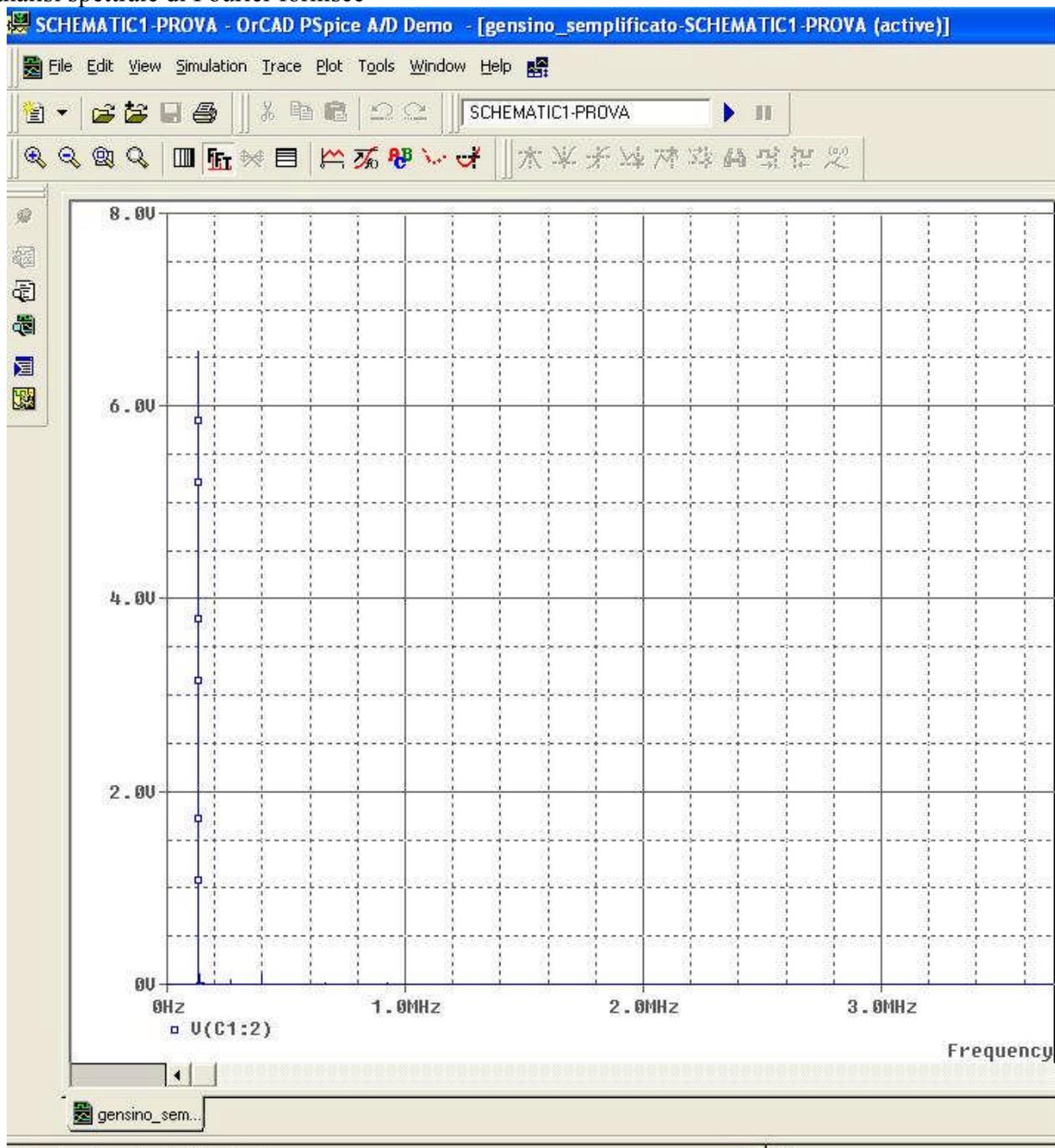
il valore sperimentale è di 125 KHz, vi è uno scarto di circa il 20%.

Circuito semplificato

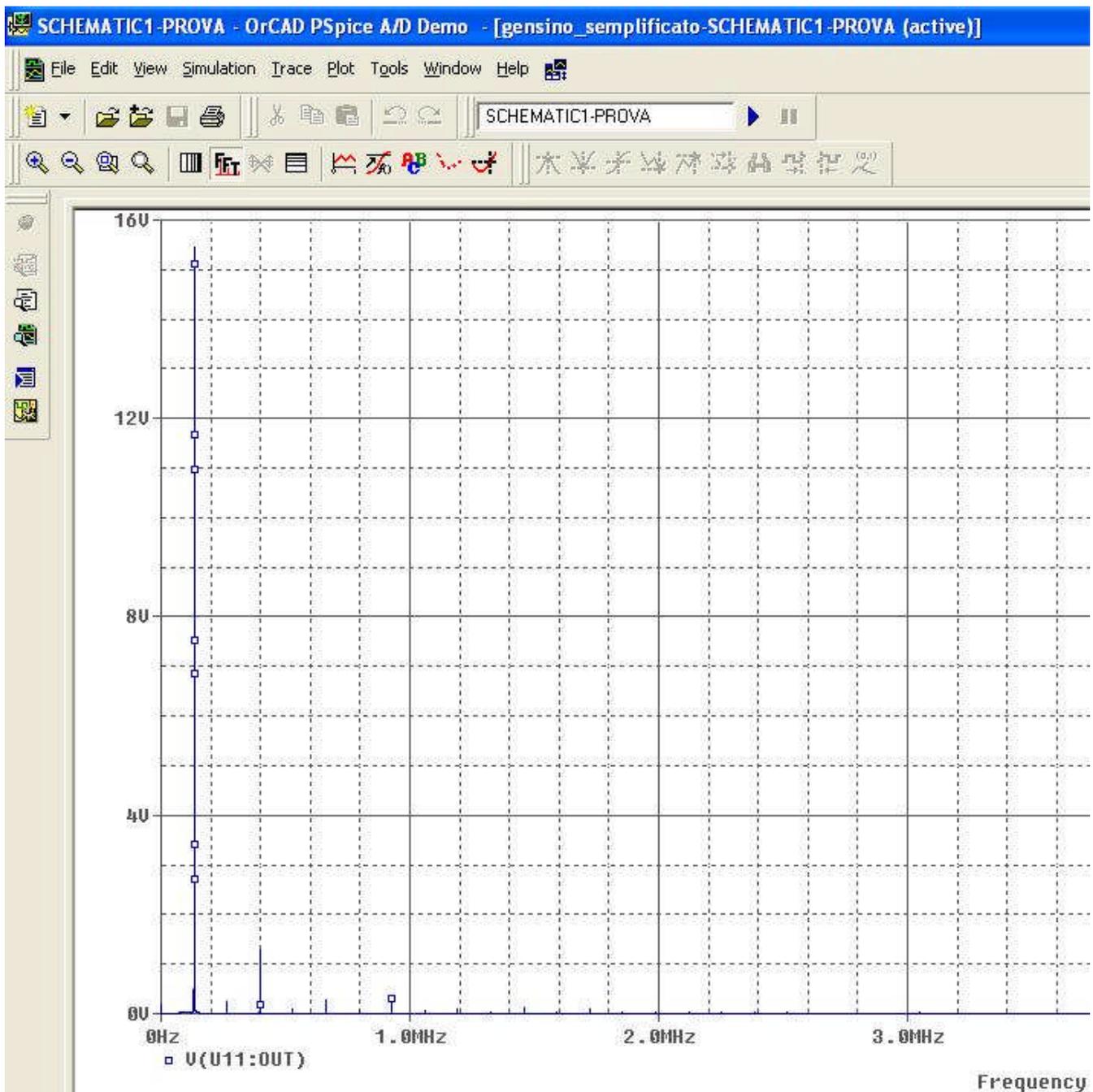


Uscita del circuito semplificato ottenuta con simulatore Pspice

L'analisi spettrale di Fourier fornisce

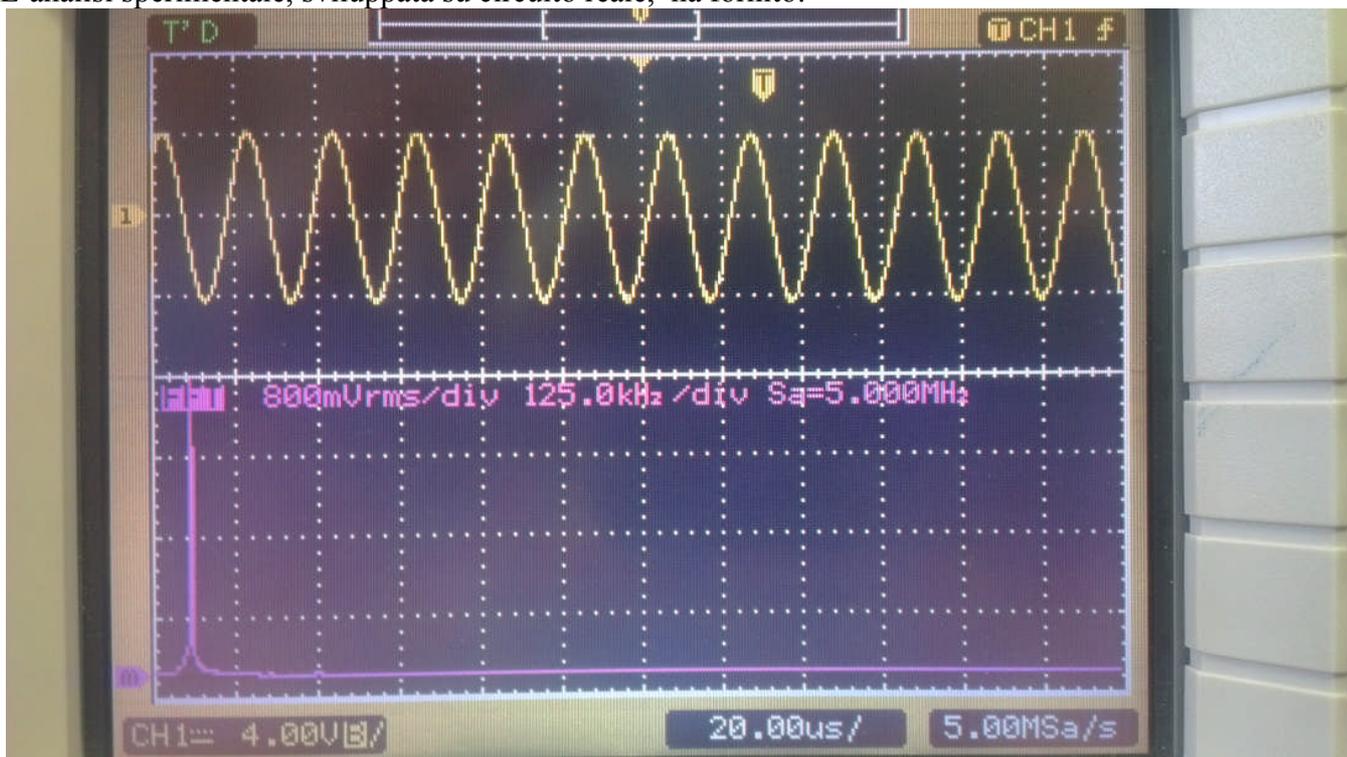


Analisi spettrale, ottenuta con simulatore Pspice, del segnale presente ai capi del filtro LC. Si vede chiaramente che vi è un'armonica a circa 160 KHz; un'altra, di ampiezza molto piccola, a 200 KHz e prima di 1 MHz altre due di ampiezza quasi invisibile.

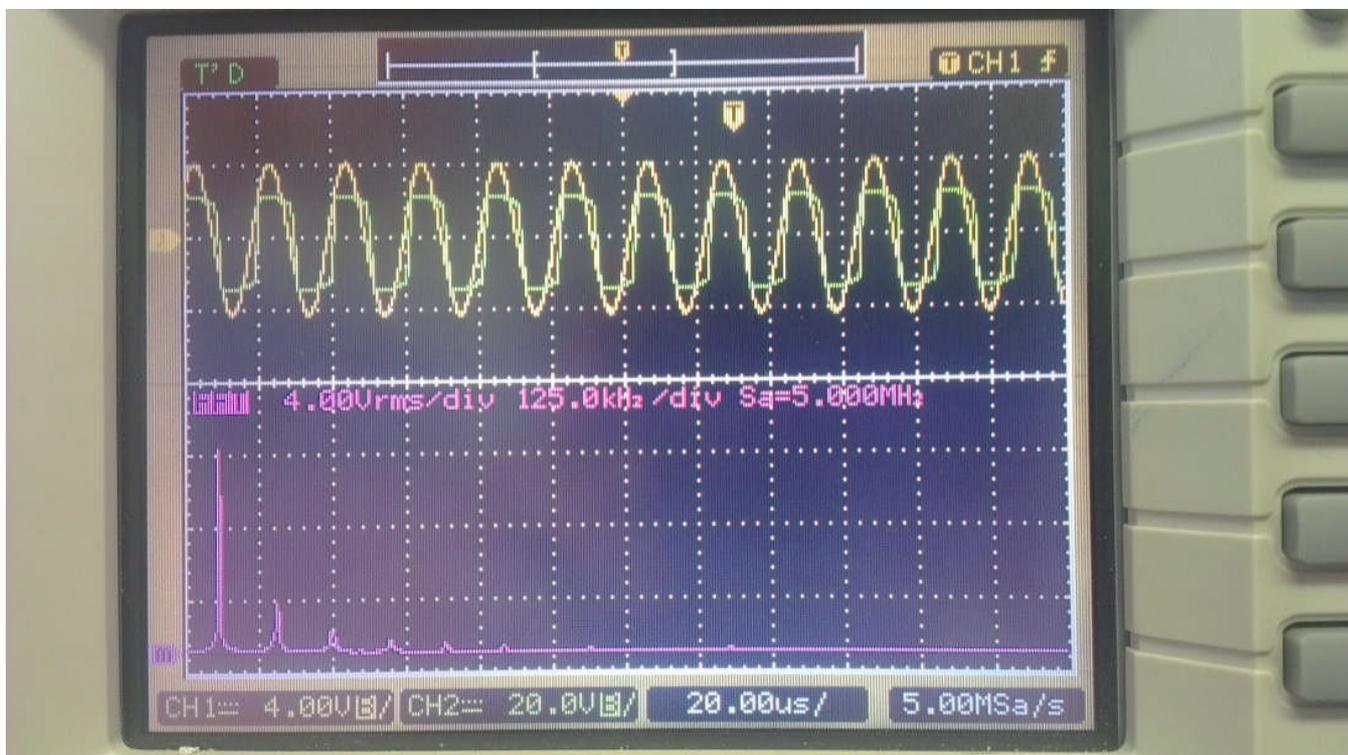


Analisi spettrale dell'onda presente all'uscita dell'A.O. (onda quadra) ottenuta con simulatore Pspice. Possiamo vedere oltre alla prima armonica l'ampiezza delle altre e così rilevare l'ottima azione filtrante di LC.

L'analisi sperimentale, sviluppata su circuito reale, ha fornito:

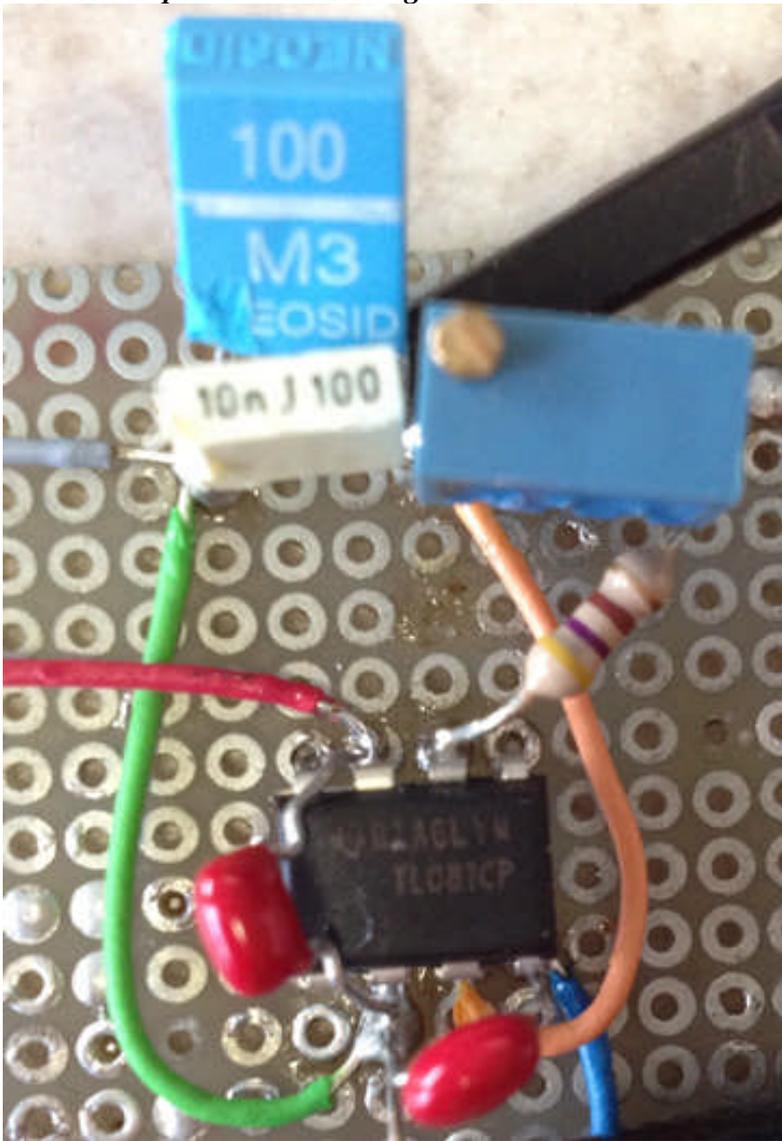


Analisi spettrale dell'onda (sinusoidale) presente ai capi dell'LC. Come si può rilevare l'incidenza delle armoniche superiore alla prima è in pratica trascurabile. Evidenziamo che pur essendoci l'alimentazione a  $\pm 12$  Volt la tensione di picco è 4 volt. Crediamo che ciò sia dovuto sia alla presenza di  $R_1$  che alla frequenza di taglio superiore dell'A.O.



Analisi spettrale dell'onda (quadra) presente all'uscita dell'A.O. Sono ben evidenti le armoniche superiori alla prima

*Il circuito sperimentale è il seguente*



Componenti, che ripetiamo per comodità:

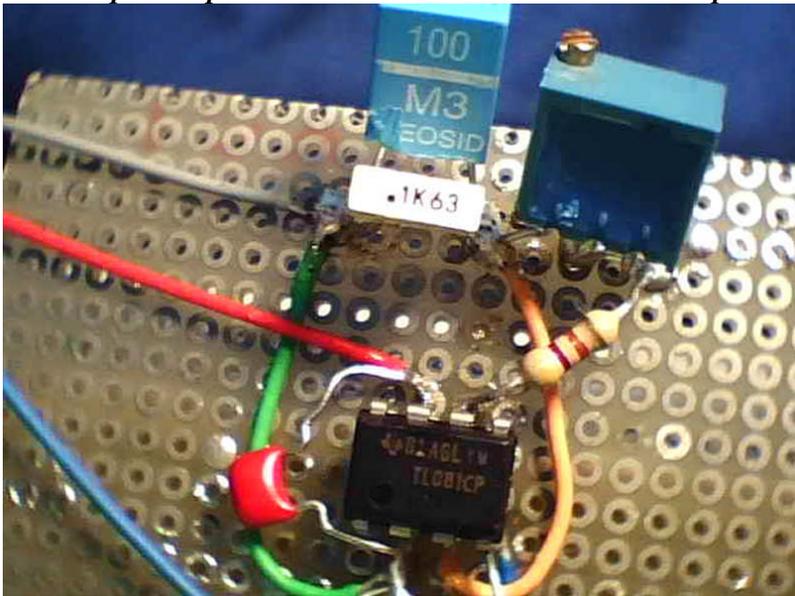
- 1 resistore da 470  $\Omega$  toll. 5%
- 1 condensatore poliestere 10 nF toll. 5% massima tensione applicabile 100 V;
- una induttanza da 100 micro Henry;
- un trimmer da 10K $\Omega$ ;
- due condensatori poliestere da 100 nF

frequenza di risonanza

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{10 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} \cong 159 \text{ KHz}$$

il valore sperimentale è di 125 KHz vi è uno scarto di circa il 20%.

**Altra prova sperimentale con valori diversi dei componenti circuitali**



Componenti:

- 1 resistore da 470 Ω toll. 5%
- 1 condensatore poliestere 100 nF, tolleranza 10%, 63 Volt di esercizio ;
- una induttanza da 100 micro Henry;
- un trimmer da 10KΩ;
- due condensatori poliestere da 100 nF
- tensione di alimentazione dell'A.O. ±12 Volt.

frequenza di risonanza

$$\omega_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{100 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} = 50,32 \text{ KHz}$$

**il valore sperimentale è di 48,38KHz vi è uno scarto di circa il 3,8%.**

Dall'immagine si rileva come abbiamo cercato di rendere i collegamenti più brevi possibili per non introdurre reattanze parassite.

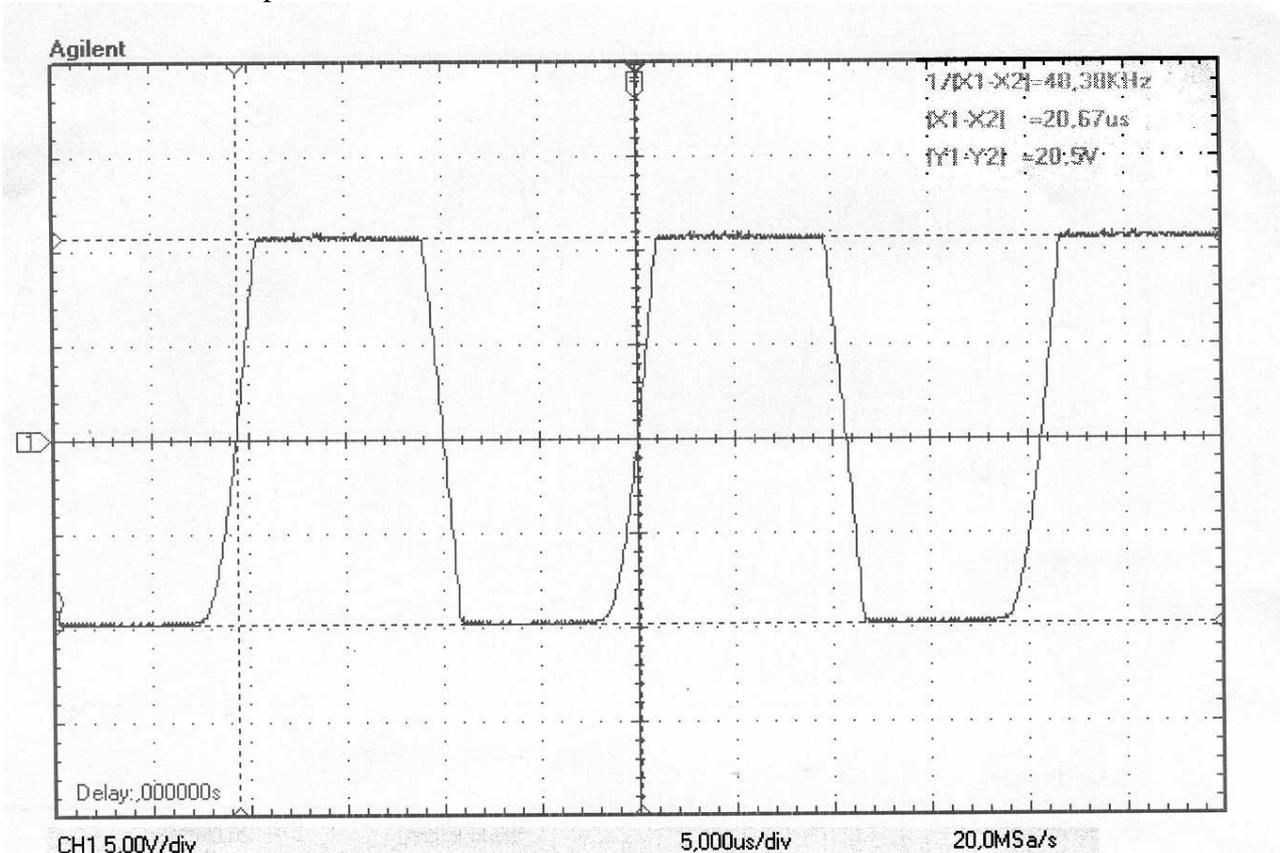
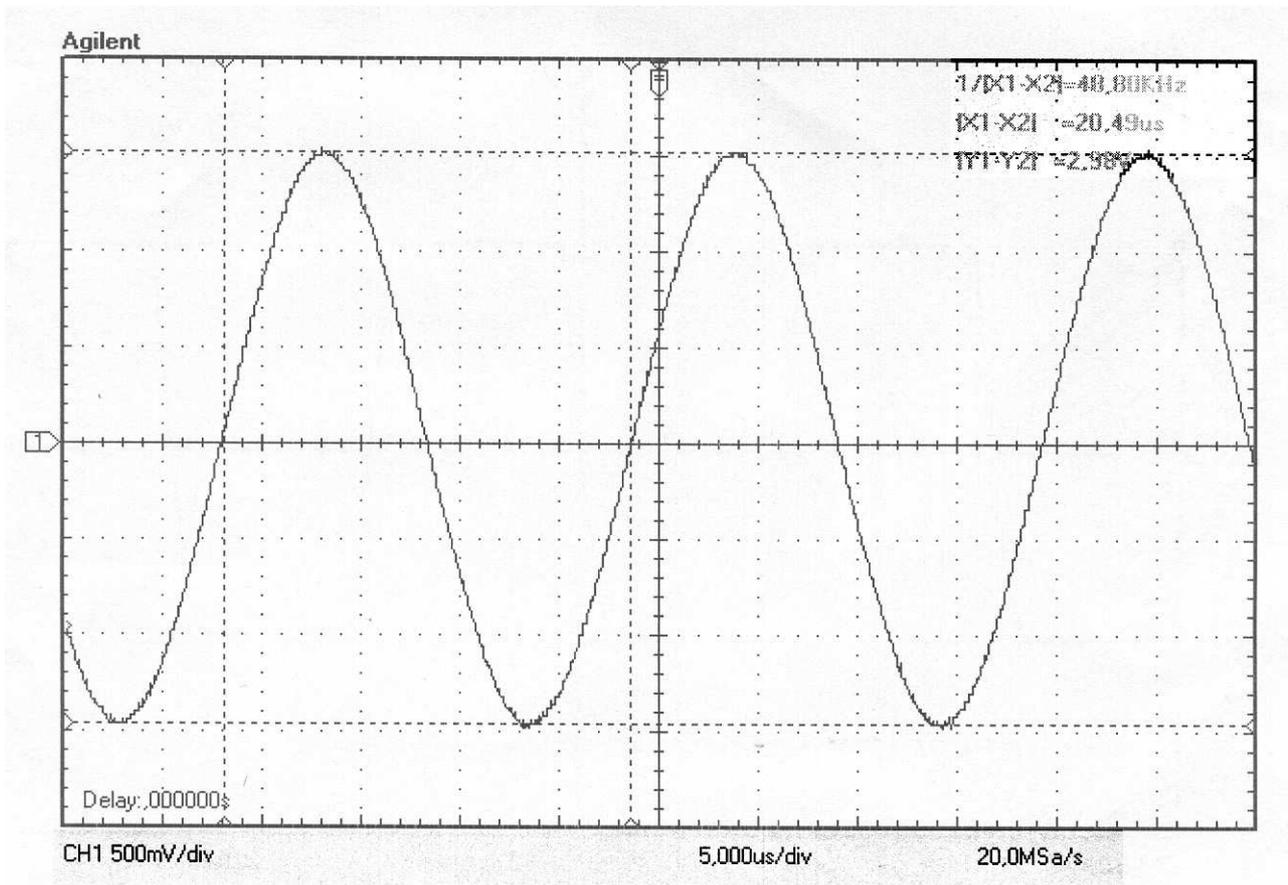
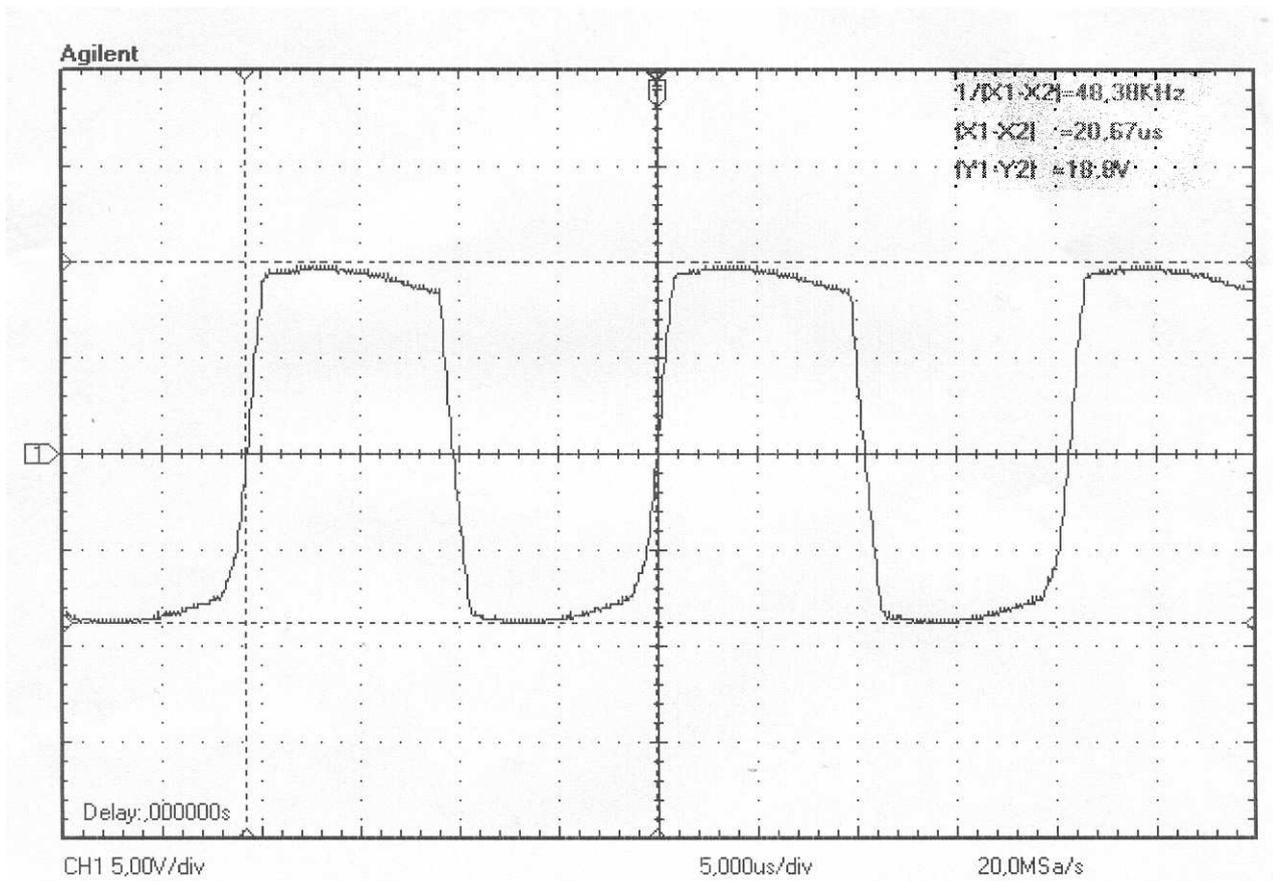


Grafico ottenuto con trimmer posizionato a circa 2140 Ohm; sommando quindi la resistenza da 470 Ohm la R<sub>1</sub> è pari a 2610 Ohm. L'onda quadra è accettabile. Tensione picco-picco dell'onda quadra pari a 20,5 Volt. Alimentazione ±12 Volt



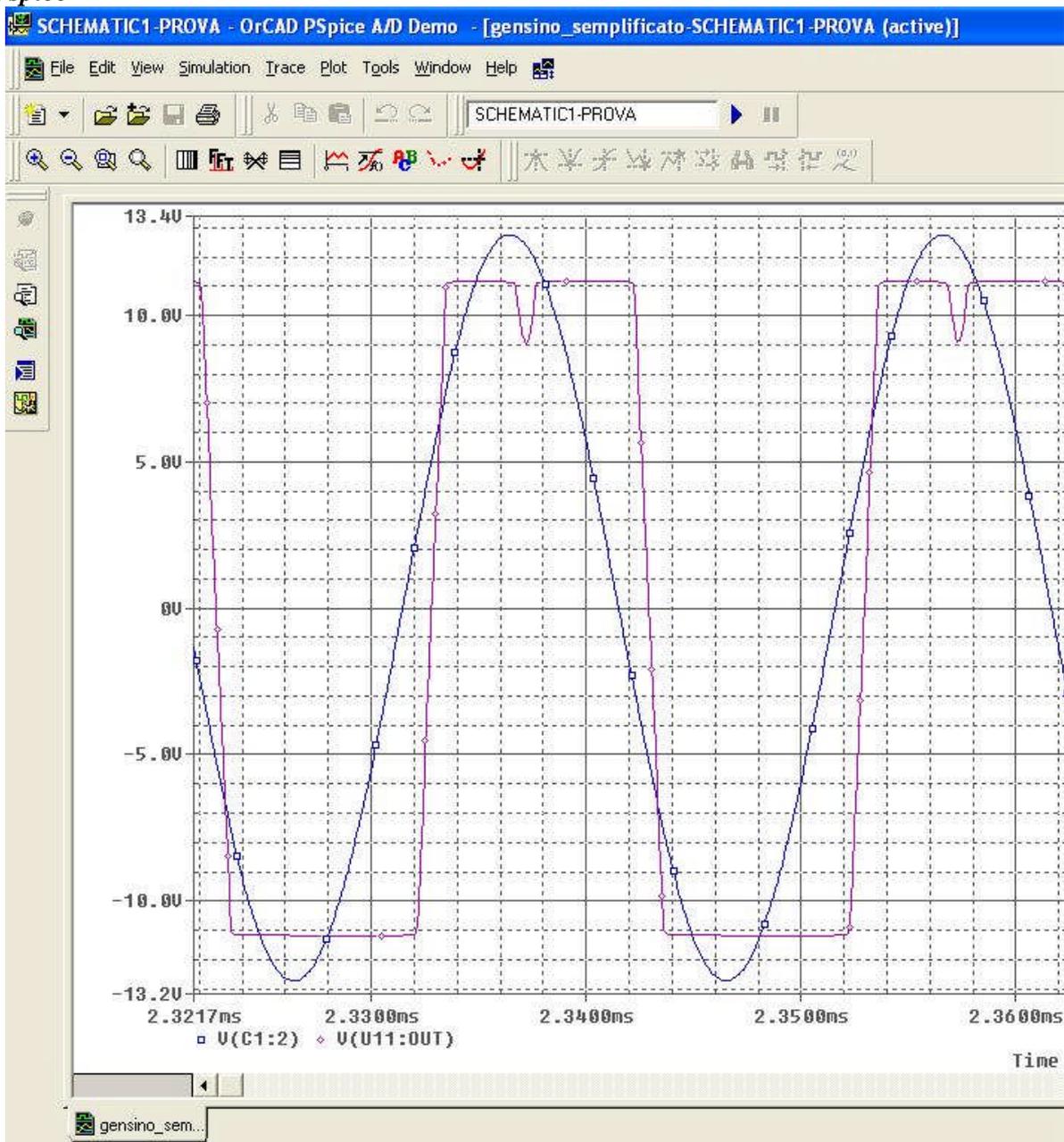
Tensione picco-picco dell'onda sinusoidale 2,98 Volt. L'onda è perfetta ma l'effetto della  $R_1$  si fa sentire sull'ampiezza del segnale.



Resistenza R1 circa 580 Ohm, come si nota l'onda quadra, è leggermente distorta e con tensione picco-picco pari a 18,8 Volt.

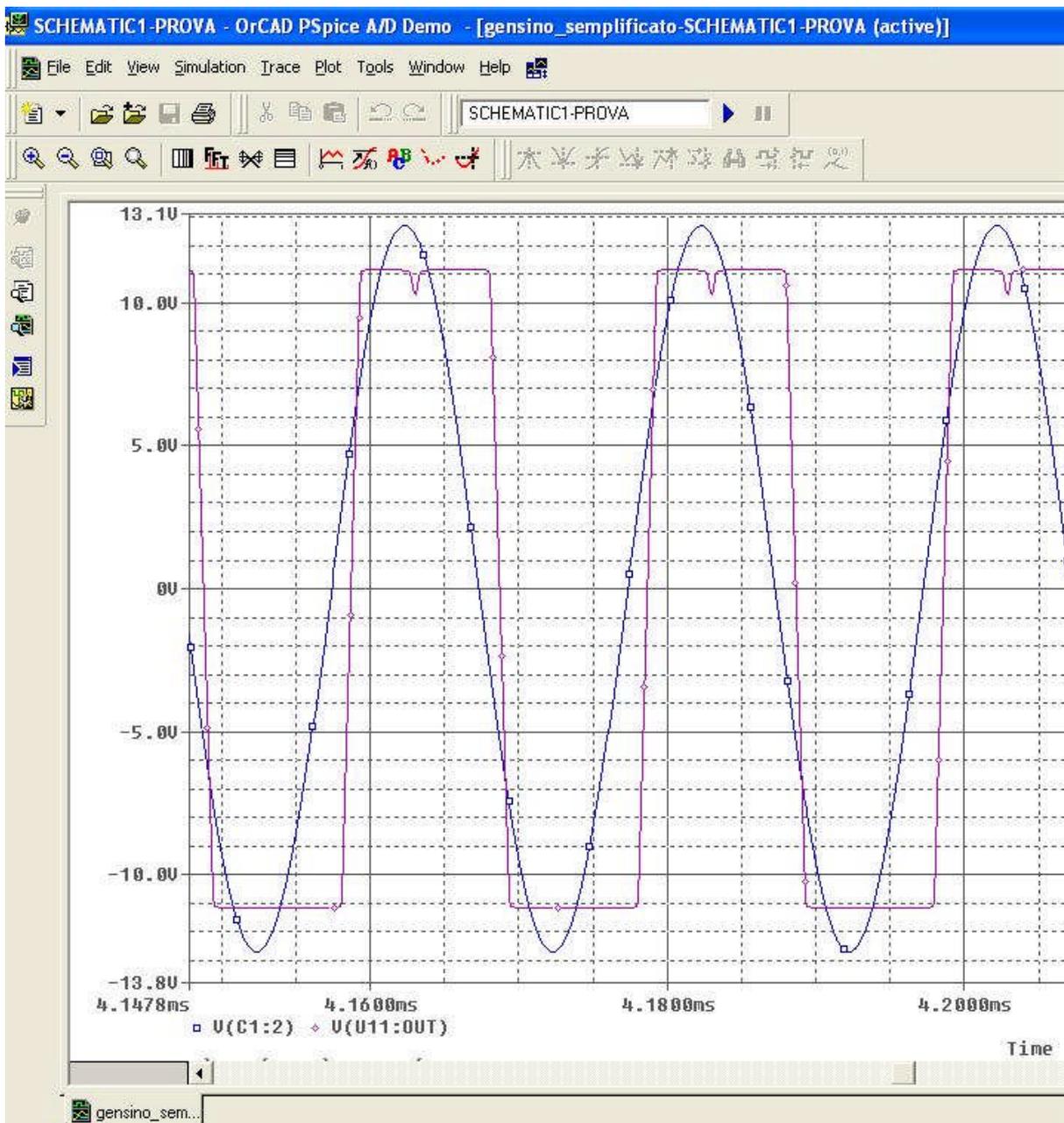
Durante la sperimentazione si è rilevato che variando il trimmer ( $R_1$ ) da 600 Ohm a 1 Kohm l'oscillazione si innesca sempre.

Riportiamo, per valori dei componenti utilizzati nel circuito sperimentale, la simulazione con Pspice



Valore della resistenza  $R_1$  pari a 560 Ohm

Si può rilevare l'effetto retroattivo del segnale filtrato dal circuito risonante LC sull'onda quadra.



Valore della resistenza  $R_1$  pari a 2.6KOhm

Si evidenzia come al crescere della  $R_1$  l'effetto retroattivo si fa sentire meno e l'onda quadra risulta meno distorta.

## Conclusioni

In questa nuova analisi si è voluto tener conto dei suggerimenti che gli amici di "Grix" hanno fatto sulla stesura e sui contenuti del primo articolo.

Primo articolo che, precisiamo, non rinneghiamo perché in esso si era cercato di raccontare sia com'era nata l'idea del circuito sia spiegarne il funzionamento più fisicamente che con i canoni dell'elettronica.

L'oscillatore si presenta molto semplice da progettare, infatti:

- la frequenza di oscillazione (a meno delle tolleranze commerciali) è data da

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}};$$

- la resistenza di  $R_1$  deve rispettare la seguente condizione:  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \geq R_1$ .

Si è visto che se è  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \leq R_1$  il transitorio è esponenziale decrescente altrimenti è oscillante decrescente. Valore dell'ordine del  $K\Omega$  ( $2 \div 4$ ), riduce molto l'interazione tra onda quadra e sinusoidale, fornendo delle onde accettabili; di contro viene attenuata l'ampiezza dell'onda sinusoidale.

Disponibili sempre ad ogni chiarimento, chiediamo agli amici di "Grix" di, se vogliono, di provare il circuito perché "è lui l'oggetto in discussione" non noi.

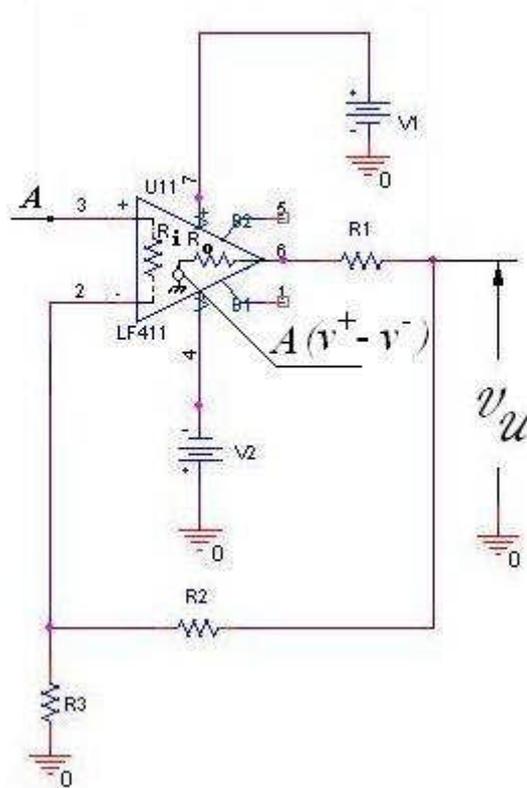
E poiché prima, questo bello e semplice circuitino (concedetecelo) non c'era e adesso esiste ed è nato in Italia, non ci dispiacerebbe se volessero suggerire un nome che.....suoni tutto italiano.

Grazie per l'attenzione.

# ALLEGATO A

## Analisi con A.O. Reale

Se vogliamo considerare l'A.O. come reale il circuito da studiare è il seguente:



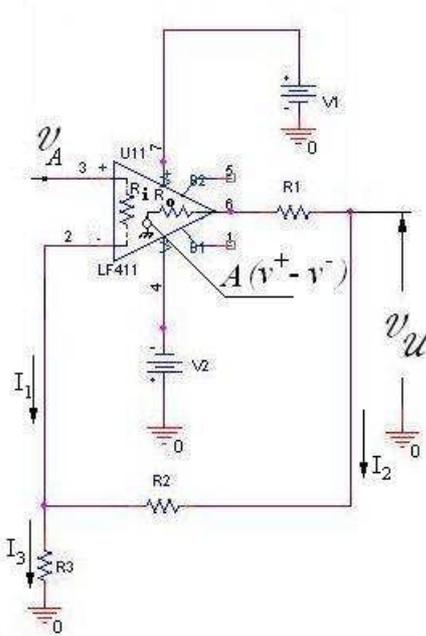
Osserviamo che:

1.  $R_0$  ed  $R_i$  sono in serie, nello sviluppo ingloberemo tutto in  $R_1$ ;
2. relativamente al guadagno, supponendo la resistenza del generatore di segnale (generatore applicato in A) sia nulla e che il carico sia infinito, si dimostra (vedi allegato A in quanto nei sacri testi non ho trovato nulla che consideri la presenza di una resistenza  $R_1$ ):

$$G = \frac{v_u}{v^+} = \frac{\frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} \cdot \left(\frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} \cdot \left(\frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

è facile vedere che per  $A \rightarrow \infty$  e  $R_i \rightarrow \infty$  si ottiene:  $G = 1 + \frac{R_2}{R_3}$

Dimostriamo la relazione prima riportata:



$$I_1 = \frac{v_i - v_B}{R_i} ; I_2 = \frac{v_u - v_B}{R_2} ; I_2 = \frac{A \cdot (v_i - v_B) - v_B}{R_1 + R_2} ; I_3 = \frac{v_B}{R_3}$$

$I_1 + I_2 = I_3$  ; possiamo scrivere :

$$\begin{cases} \frac{v_i - v_B}{R_i} + \frac{v_u - v_B}{R_2} = \frac{v_B}{R_3} \\ \frac{v_u - v_B}{R_2} = \frac{A \cdot (v_i - v_B) - v_B}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

sistema con incognite  $v_u$  e  $v_B$

$$\left\{ \frac{v_u - v_B}{R_2} - v_B \cdot \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = -\frac{v_i}{R_i} \right. \quad (1)$$

$$\left. \left\{ v_u \cdot \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \right) + v_B \cdot \left( \frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{A \cdot v_i}{R_1} \right. \right. \quad (2)$$

ricaviamo  $v_B$  dalla (1) e sostituiamolo nella (2)

$$v_B = \frac{\frac{v_u}{R_2} + \frac{v_i}{R_i}}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$v_u \cdot \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\frac{v_u}{R_2} + \frac{v_i}{R_i}}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \cdot \left( \frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{A \cdot v_i}{R_1}$$

$$v_u \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{v_u}{R_2} \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \right) \cdot \left( \frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{A \cdot v_i}{R_1} - \frac{v_i}{R_i} \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \right) \cdot \left( \frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$v_u \cdot \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \right) \cdot \left( \frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] = v_i \cdot \left[ \frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \cdot \left( \frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]$$

$$G = \frac{v_u}{v_i} = \frac{\frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \cdot \left( \frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \right) \cdot \left( \frac{A}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

verifichiamo che per  $A \rightarrow \infty$  si ottiene:  $G = 1 + \frac{R_2}{R_3}$

mettendo A a fattor comune otteniamo:

$$G = \frac{v_u}{v_i} = \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{A \cdot R_2} \right)}{\frac{1}{A \cdot R_1} + \frac{1}{A \cdot R_2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{A \cdot R_2} \right)}$$

essendo A molto grande tutti i termini ove si trova a denominatore si possono trascurare:

$$G = \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)} \cdot \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)} \right]}{\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)} \cdot \frac{1}{R_1}} = \frac{1 - \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}}{\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}} =$$

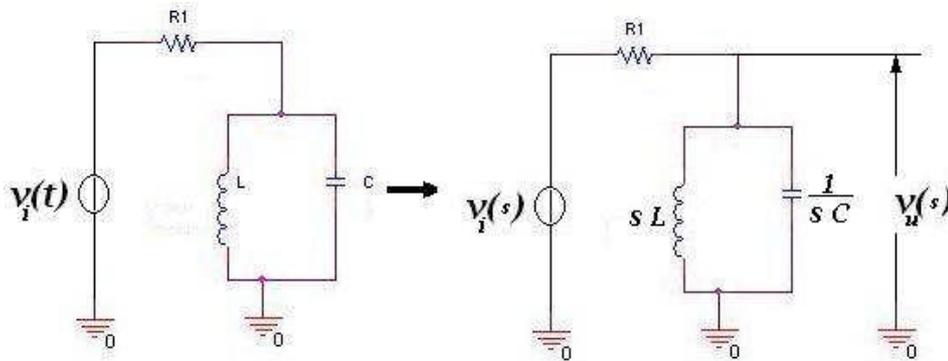
essendo  $R_i$  molto grande il termine  $\frac{1}{R_i}$  si può approssimare a zero, quindi

$$G = \frac{1}{\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}} = R_2 \cdot \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = 1 + \frac{R_2}{R_3}$$

## ALLEGATO B

L'onda quadra, in uscita dall'A.O., subisce un'azione filtrante dal circuito LC; studiamo questa azione.

*L'Analisi sarà sviluppata utilizzando il metodo simbolico di Laplace.*



Determiniamo la funzione di trasferimento

$$Z(s) = L // C = \frac{s \cdot L \cdot \frac{1}{s \cdot C}}{s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}} = L \cdot \frac{s}{1 + s^2 \cdot L \cdot C}$$

$$F(s) = \frac{v_u(s)}{v_i(s)} = \frac{Z(s)}{R_1 + Z(s)} = \frac{L \cdot \frac{s}{1 + s^2 \cdot L \cdot C}}{R_1 + L \cdot \frac{s}{1 + s^2 \cdot L \cdot C}}$$

$$F(s) = \frac{s \cdot L}{1 + s^2 \cdot L \cdot C} \cdot \frac{1}{\frac{R_1 \cdot (1 + s^2 \cdot L \cdot C) + s \cdot L}{1 + s^2 \cdot L \cdot C}}$$

$$F(s) = \frac{1}{R_1 \cdot C} \cdot \frac{s}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R_1 \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{R_1 \cdot C} \cdot \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + j\omega \cdot \frac{1}{R_1 \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}} = \frac{1}{R_1 \cdot C} \cdot \frac{j\omega}{\left(\frac{1}{L \cdot C} - \omega^2\right) + j\omega \cdot \frac{1}{R_1 \cdot C}}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{R_1 \cdot C} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{L \cdot C} - \omega^2\right)^2 + \omega^2 \cdot \frac{1}{R_1^2 \cdot C^2}}}$$

$$\varphi_{F(j\omega)} = 90 - \arctan\left(\frac{\omega}{R_1 \cdot C \left(\frac{1}{L \cdot C} - \omega^2\right)}\right)$$

per  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

$$F(j\omega_0) = 1$$

$$\varphi_{F(j\omega_0)} = 0$$

è facile rilevare che per:

a)  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |F(j\omega)| = 0$  ; vengono attenuate le ampiezze delle basse frequenze

b)  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |F(j\omega)| = 0$  ; vengono attenuate le ampiezze delle alte frequenze

essendo un filtro passivo il massimo guadagno può valere 1, nel nostro caso si ha per

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Trattasi quindi di un filtro passa banda.

Si dimostra (vedi allegato C) che:

se  $\begin{cases} v_i(t) = V_{\max} \cdot \text{sen} \omega t & \text{è il segnale d'ingresso (segnale periodico)} \\ |F(j\omega)| e \varphi & \text{sono modulo e argomento della funzione di trasferimento} \end{cases}$

il segnale d'uscita è dato da:

$$v_u(t) = |F(j\omega)| \cdot V_{\max} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Se, per l'onda quadra presente all'uscita dell'A.O., consideriamo il suo sviluppo in serie abbiamo:

$$v_i(t) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n - 1} \cdot \text{sen}(2 \cdot n - 1) \cdot \omega \cdot t$$

limitandoci alla prima armonica ( $\omega_0$ ) abbiamo:

$$v_i(t) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \cdot \text{sen} \omega_0 \cdot t$$

per  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  abbiamo già visto che  $|F(j\omega_0)| = 1$  e  $\varphi = 0$

quindi:

$$v_u(t) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} |F(j\omega_0)| \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t + \varphi) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$$

quindi segnali d'ingresso e d'uscita coincidono.

Consideriamo la terza armonica

$$v_i(t) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{sen}(3\omega t)$$

$$v_u(t) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi \cdot 3} |F(j\omega)| \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

con  $\omega = 3 \cdot \omega_0$

Il seno variando tra zero e 1 non influenza l'ampiezza massima del segnale. La funzione di trasferimento al crescere di  $\omega$  diminuisce per cui l'ampiezza massima del segnale diminuisce, rispetto a quella della prima armonica, perché questa viene divisa per 3 e poi moltiplicata per una quantità minore di 1.

## ALLEGATO C

**STUDIO DEL TRANSITORIO- sarà utilizzato il metodo simbolico di Laplace.-**

Limitandoci alla prima armonica ( per le altre armoniche si procede allo stesso modo) abbiamo:

$$v_u(t) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \cdot \text{sen} \omega \cdot t$$

$$z(s) = \frac{s \cdot L \cdot \frac{1}{s \cdot C}}{s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}} = \frac{s \cdot L}{1 + s^2 \cdot L \cdot C}$$

$$v_i(s) = L \left\{ \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \text{sen} \omega \cdot t \right\} = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$v_u(s) = v_i(s) \cdot \frac{s \cdot L}{R_1(1 + s^2 \cdot L \cdot C) + s \cdot L} = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{s \cdot L}{R_1(1 + s^2 \cdot L \cdot C) + s \cdot L}$$

$$v_u(s) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{s \cdot L}{R_1(1 + s^2 \cdot L \cdot C) + s \cdot L} = \frac{4 \cdot V_0 \cdot \omega}{\pi \cdot R_1 \cdot C} \cdot \frac{s}{(s^2 + \omega^2) \left( s^2 + s \cdot \frac{1}{R_1 \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C} \right)}$$

$$(s^2 + \omega^2) = (s - j\omega)(s + j\omega)$$

$$s^2 + s \cdot \frac{1}{R_1 \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C} = -\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

avremo quindi le seguenti quattro radici:

$$s_1 = -\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} - \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$s_3 = j\omega$$

$$s_4 = -j\omega$$

possiamo porre:

$$v_u(s) = \frac{4 \cdot V_0 \cdot \omega}{\pi \cdot R_1 \cdot C} \cdot \frac{s}{(s^2 + \omega^2) \left( s^2 + s \cdot \frac{1}{R_1 \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C} \right)} = \frac{4 \cdot V_0 \cdot \omega}{\pi \cdot R_1 \cdot C} \cdot \frac{s}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot (s - s_3) \cdot (s - s_4)}$$

$$v_u(s) = \frac{4 \cdot V_0 \cdot \omega}{\pi \cdot R_1 \cdot C} \cdot \left( \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} + \frac{C^*}{s - s_3} + \frac{D}{s - s_4} \right)$$

$$A = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \cdot \frac{s}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot (s - s_3) \cdot (s - s_4)} = \frac{s_1}{(s_1 - s_2) \cdot (s_1 - s_3) \cdot (s_1 - s_4)}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2) \cdot \frac{s}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot (s - s_3) \cdot (s - s_4)} = \frac{s_2}{(s_2 - s_1) \cdot (s_2 - s_3) \cdot (s_2 - s_4)}$$

$$C^* = \lim_{s \rightarrow s_3} (s - s_3) \cdot \frac{s}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot (s - s_3) \cdot (s - s_4)} = \frac{s_3}{(s_3 - s_1) \cdot (s_3 - s_2) \cdot (s_3 - s_4)}$$

$$D = \lim_{s \rightarrow s_4} (s - s_4) \cdot \frac{s}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot (s - s_3) \cdot (s - s_4)} = \frac{s_4}{(s_4 - s_1) \cdot (s_4 - s_2) \cdot (s_4 - s_3)}$$

con

$$s_1 - s_2 = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$s_2 - s_1 = -2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$s_3 - s_4 = 2 \cdot j\omega$$

$$s_4 - s_3 = -2 \cdot j\omega$$

$$s_1 - s_3 = -\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} - j\omega$$

$$s_3 - s_1 = j\omega - \left(-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) = j\omega + \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} - \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$s_1 - s_4 = -\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} + j\omega$$

$$s_4 - s_1 = -j\omega + \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} - \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$s_2 - s_3 = -\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} - \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} - j\omega$$

$$s_3 - s_2 = j\omega + \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$s_2 - s_4 = -\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} - \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} + j\omega$$

$$s_4 - s_2 = -j\omega + \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$A = \frac{s_1}{(s_1 - s_2) \cdot (s_1 - s_3) \cdot (s_1 - s_4)} = \frac{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}}{\left(2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} - j\omega\right) \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} + j\omega\right)}$$

$$\frac{s_1}{(s_1 - s_2) \cdot (s_1 - s_3) \cdot (s_1 - s_4)} = \frac{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)^2 + \omega^2\right]}$$

$$B = \frac{s_2}{(s_2 - s_1) \cdot (s_2 - s_3) \cdot (s_2 - s_4)} = \frac{\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)^2 + \omega^2\right]}$$

$$C^* = \frac{s_3}{(s_3 - s_1) \cdot (s_3 - s_2) \cdot (s_3 - s_4)} = \frac{1}{2 \cdot \left[\left(j\omega + \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \left[\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}\right]\right]} = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{L \cdot C} - \omega^2 + j \cdot \frac{\omega}{R_1 \cdot C}\right)}$$

alla frequenza di risonanza ci resta

$$C^* = \frac{s_3}{(s_3 - s_1) \cdot (s_3 - s_2) \cdot (s_3 - s_4)} = \frac{1}{2 \cdot j \cdot \frac{\omega_0}{R_1 \cdot C}} = -j \frac{R_1 \cdot C \cdot \sqrt{L \cdot C}}{2}$$

$$D = \frac{s_4}{(s_4 - s_1) \cdot (s_4 - s_2) \cdot (s_4 - s_3)} = j \frac{R_1 \cdot C \cdot \sqrt{L \cdot C}}{2}$$

Possiamo procedere all'antitrasformazione

$$L^{-1}\{v_u(s)\} = \frac{4 \cdot V_0 \cdot \omega_0}{\pi \cdot R_1 \cdot C} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} + \frac{C^*}{s-s_3} + \frac{D}{s-s_4} \right\}$$

$$v_u(t) = \frac{4 \cdot V_0 \cdot \omega_0}{\pi \cdot R_1 \cdot C} \cdot (A \cdot e^{s_1 t} + B \cdot e^{s_2 t} + C^* \cdot e^{s_3 t} + A \cdot e^{s_4 t} + )$$

$$v_u(t) = \frac{4 \cdot V_0 \cdot \omega_0}{\pi \cdot R_1 \cdot C} \cdot \left( A \cdot e^{\left( -\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \right) t} + B \cdot e^{\left( -\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} - \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \right) t} + C^* \cdot e^{j\omega_0 t} + D \cdot e^{-j\omega_0 t} + \right)$$

$$v_u(t) = \frac{4 \cdot V_0 \cdot \omega_0}{\pi \cdot R_1 \cdot C} \cdot \left( A \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} t} \cdot e^{+\sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t} + B \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} t} \cdot e^{-\sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t} - j \frac{R_1 \cdot C \cdot \sqrt{L \cdot C}}{2} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \right)$$

Possiamo distinguere una risposta transitoria e una a regime.

**Risposta transitoria:**

$$v_{u,Tr}(t) = \frac{4 \cdot V_0 \cdot \omega_0}{\pi \cdot R_1 \cdot C} \cdot \left( A \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} t} \cdot e^{+\sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t} + B \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} t} \cdot e^{-\sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t} \right)$$

$$v_{u,Tr}(t) = \frac{4 \cdot V_0 \cdot \omega_0}{\pi \cdot R_1 \cdot C} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} t} \cdot \left( A \cdot e^{+\sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t} + B \cdot e^{-\sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t} \right)$$

Ricaviamo le espressioni di A e di B alla frequenza di risonanza.

$$A = \frac{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}}{2 \cdot \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \cdot \left[ \left( -\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \right)^2 + \omega^2 \right]}$$

$$A = \frac{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}}{2 \cdot \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 + \left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C} - 2 \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \cdot \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} + \frac{1}{L \cdot C} \right]}$$

$$A = \frac{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}}{2 \cdot \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \cdot \left[ 2 \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{R_1 \cdot C} \cdot \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \right]}$$

$$A = -\frac{\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} - \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \cdot \left(\frac{2}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right) \left[\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} - \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right]}$$

$$A = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \cdot \left(\frac{2}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)} = -\frac{R_1 \cdot C}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}}$$

procedendo allo stesso modo per B otteniamo:

$$B = \frac{\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}\right)^2 + \omega^2\right]} = \frac{R_1 \cdot C}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}}$$

quindi essendo  $A = -B$ , sostituendo nell'espressione del transitorio otteniamo:

$$v_{u,Tr}(t) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi \cdot R_1 \cdot C \cdot \sqrt{L \cdot C}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} t} \cdot A \cdot \left( e^{+\sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t} - e^{-\sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t} \right)$$

$$v_{u,Tr}(t) = -\frac{4 \cdot V_0}{\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} t} \cdot \left( \frac{e^{+\sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t} - e^{-\sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t}}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}} \right)$$

si possono presentare tre casi

$$\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C} \stackrel{>}{=} 0$$

$$\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} \stackrel{>}{=} \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$\frac{\sqrt{L \cdot C}}{2 \cdot C} \stackrel{>}{=} R_1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \stackrel{>}{=} R_1$$

- se  $R_1$  è minore di  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$  il radicando è positivo, la risposta è esponenziale smorzata;
- se  $R_1$  è uguale a  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$  il radicando è nullo, la risposta è esponenziale smorzata;
- se  $R_1$  è maggiore di  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$  il radicando è negativo, la risposta è oscillante smorzata;

$$v_{u,Tr}(t) = -\frac{4 \cdot V_0}{\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} t} \cdot \left( \frac{e^{+j \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t} - e^{-j \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} t}}{2 \cdot j \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}}} \right)$$

$$v_{u,Tr}(t) = -\frac{4 \cdot V_0}{\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C} t} \cdot \text{sen} \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot R_1 \cdot C}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} \cdot t$$

**Risposta a regime:**

$$v_{u,rg}(t) = \frac{4 \cdot V_0 \cdot \omega_0}{\pi \cdot \omega_0} \left( \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \text{sen} \omega_0 t$$

sostituendo l'espressione della frequenza di risonanza abbiamo:

$$v_{u,rg}(t) = \frac{4 \cdot V_0}{\pi} \text{sen} \frac{t}{\sqrt{L \cdot C}}$$

coincidente con la prima armonica.