Filtri - Generalità

I filtri sono particolari quadripoli, funzionanti in regime alternato, in grado di presentare attenuazione differenziata in funzione della frequenza del segnale applicato in ingresso.
Il loro compito è di bloccare il passaggio di una certa gamma di frequenze consentendo il transito di altre.
Esistono diversi tipi di filtri che si possono classificare in relazione ai componenti con i quali sono costruiti :

- Filtri "***attivi***" se fanno uso principalmente di circuiti integrati(amplificatori,ecc)
- Filtri "***passivi***" se sono costituiti da resistenze induttori e condensatori

Inoltre i filtri attivi e passivi possono essere di 1°, 2° ordine … n° ordine e possono diversificarsi in funzione della loro **banda passante**, per cui possono essere suddivisi in:

- filtri "***passa-basso***" se lasciano libero transito alle basse frequenze, bloccando quelle alte
- filtri "***passa-alto***" se lasciano libero transito alle alte frequenze, bloccando quelle basse
- filtri "***passa-banda***" se lasciano libero il passaggio ad un gruppo di frequenze intermedie, bloccando quelle alte e quelle basse.

Si indica con Ao (espresso in Volt) o con Ao_{dB} (espressa in dB), l'attenuazione e/o guadagno subita dal segnale nell'attraversare il filtro:

$$Ao = \frac{Vu}{Vi} \Rightarrow Ao_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{Vu}{Vi}\right)$$

dove:
Vi è il segnale applicato all'ingresso del filtro
Vu è il segnale prelevato all'uscita del filtro.

In base a tutto ciò possiamo asserire:

- I filtri **passa-basso** hanno:
  - Ao ≠ 0 se la frequenza di ingresso rispetta la condizione $f < ft_L$
  - Ao = 0 se la frequenza di ingresso rispetta la condizione $f > ft_L$
- I filtri **passa-alto** hanno:
  - Ao ≠ 0 se la frequenza di ingresso rispetta la condizione $f > ft_U$
  - Ao = 0 se la frequenza di ingresso rispetta la condizione $f < ft_U$
- I filtri **passa-banda** hanno:
  - Ao ≠ 0 se la frequenza di ingresso è interna ai valori ft_L ed ft_U
  - Ao = 0 se la frequenza di ingresso è esterna ai valori ft_L ed ft_U

Tipi di risposta in Frequenza

Un'altra diversificazione tra le varie tipologie di filtro riguarda la risposta in frequenza.
Nella realizzazione di un filtro si hanno vari andamenti possibili della risposta in frequenza, caratterizzati ciascuno da precise caratteristiche tecniche che possono essere molto utili in applicazioni specifiche.

Risposta alla Butterworth
E caratterizzata da una risposta in ampiezza la più piatta possibile in banda passante nota come risposta "***massimamente piatta***".
Questa caratteristica è l'ideale nelle applicazioni audio ad alta fedeltà in cui e assolutamente necessario che il filtro amplifichi della stessa quantità tutti i segnali con frequenza compresa nella banda passante.

Il nome di risposta alla **Butterworth** si deve all'ingegnere elettronico che per primo studio il problema e ricavò questo tipo di risposta.
Butterworth effettuo il suo studio in termini di poli e di zeri della funzione di trasferimento del filtro e determinò che questi dovevano trovarsi nel piano di Gauss (piano dei numeri complessi) equispaziati su di una circonferenza di raggio opportuno.

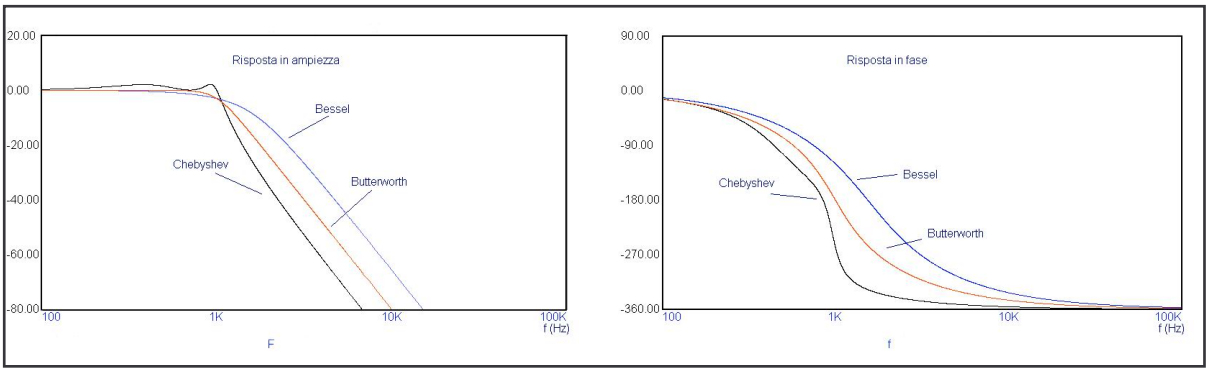
Risposta alla Chebyshew

E' caratterizzata da una risposta in ampiezza con oscillazioni costanti in banda passante e queste oscillazioni prendono il nome di "*ripple*" per cui la riposta viene anche chiamata "***equi-ripple***".
Questa caratteristica fa si che il filtro presenti in prossimità della frequenza di taglio una pendenza di molto elevata.

Risposta alla Bessel

E caratterizzata da una risposta in fase la più lineare possibile in banda passante.
Questa caratteristica fa si che il filtro introduca un ritardo temporale uguale per tutti i quei segnali la cui frequenza è compresa nella banda passante.
Il filtro di Bessel è utilizzato soprattutto nelle telecomunicazioni quando sono presenti molti filtri in cascata ed il ritardo temporale introdotto è notevole.
Il nome di risposta alla Bessel si deve al nome del matematico francese che per primo ha sviluppato le funzioni matematiche che sono a fondamento del comportamento del filtro.

Nella successiva figura sono riportate le f.d.t. dell'ampiezza e della fase dei tre tipi di filtro.



Filtro Passivo (RC) Passa-Basso del 1° ordine

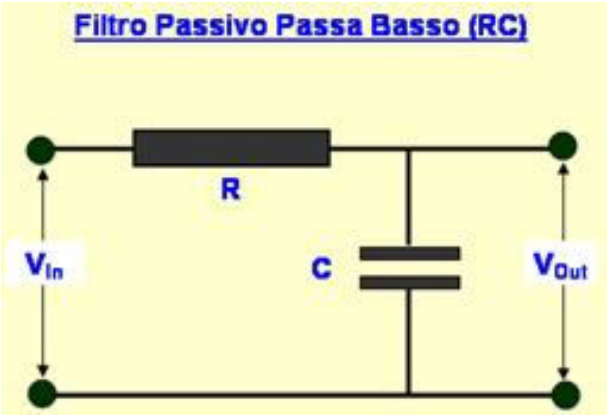


Fig. 1 – Filtro Passivo Passa-Basso

Un filtro passivo è un circuito costituito da resistenze e condensatori, che consente di eseguire una selezione nei confronti dei segnali applicati ai suoi ingressi in base alla frequenze dei segnali stessi, ovvero certe frequenze vengono fatte transitare dall'ingresso verso l'uscita, mentre altre vengono bloccate.
Esaminando il circuito di Fig. 1, il funzionamento di questa tipologia di filtro risulta essere molto intuitivo, infatti il condensatore C si comporta come un ramo aperto per tensioni continue o a frequenza molto bassa, mentre diventa un cortocircuito per segnali a frequenza elevata.
Dunque per frequenze basse il condensatore è poco influente sul circuito e quindi $V_{Out} \approx V_{In} - R*I$
Per frequenze alte C tende a diventare un cortocircuito e quindi $V_{Out} \approx 0$.
Dovrebbe ora essere chiaro che un filtro passa basso è un circuito che consente il passaggio di segnali a frequenza bassa, mentre blocca segnali a frequenza elevata.
Approfondiamo il discorso calcolando la relazione tra tensione di ingresso V_{In} e la tensione di uscita V_{Out}.
Dall'analisi del circuito di Fig. 1 si può ricavare la seguente relazione:

$$V_{Out} = V_{In} \cdot \frac{Z_c}{R + Z_c}$$

dove Z_C , che è l'impedenza del condensatore C, vale:

$$Z_c = \frac{1}{j\omega \cdot C}$$

Se ora esprimiamo la precedente relazione in funzione di Ao quale rapporto tra tensione di uscita V_{Out} e quella di ingresso V_{In} e la si riduce a denominatore comune, si ottiene la **funzione di trasferimento** del circuito in esame:

$$\frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot R \cdot C}$$

dove ω, che anche detta pulsazione angolare, vale:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot ft_L$$

Ricordando che:

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}}$$

che espresso in termini logaritmici:

$$Ao_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{V_{Out}}{V_{In}}\right)$$

si avrà che il guadagno della funzione (espresso in dB) è:

$$Ao_{dB} = 20 \cdot Log\left(\frac{1}{1 + j\omega \cdot R \cdot C}\right)$$

Il modulo di questa funzione è:

$$\left|\frac{V_{Out}}{V_{In}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}}$$

mentre la Fase (espressa in gradi) è:

$$Fase_{Ao} = \tan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1 + j\omega \cdot R \cdot C}\right)}{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 + j\omega \cdot R \cdot C}\right)}\right)^{-1} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Nella successiva figura sono riportati i grafici di Ao_{dB} e della fase $Fase_{Ao}$ supponendo che la frequenza di taglio sia pari a 1 KHz.

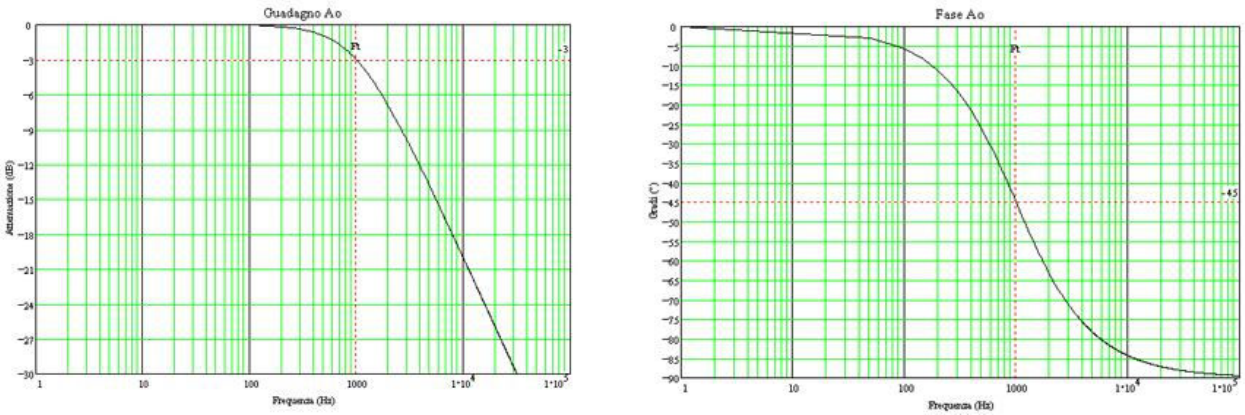


Fig. 2 - F.d.t. Guadagno e Fase relative al Filtro Passivo (RC) Passa-Basso

Dall'analisi del grafico relativo al guadagno Ao_{dB} si possono fare due osservazioni:
La pendenza della curva, per frequenze superiori a ft_L (frequenza di taglio) è pari a "***6 dB per ottava***" ossia ad ogni raddoppio della frequenza la pendenza della curva incrementa di 6 dB oppure "***20 db per decade"*** e cioè, ogni qual volta la frequenza viene incrementata di 10 volte la pendenza della curva incrementa di 20 dB
La pendenza della curva, per f = ft_L (frequenza di taglio) è attenuata di 3 dB

Dalla seconda osservazione possiamo asserire che per avere un attenuazione di 3 dB tra V_{Out} e V_{In} la frequenza deve assumere un valore pari a:

$$ft_L = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

Per arrivare a dimostrare quanto appena affermato si consideri la relazione prima analizzata anche se in termini leggermente diversi:

$$\left|V_{Out}\right| = \frac{\left|V_{In}\right|}{\sqrt{1+\left(\omega \cdot R \cdot C\right)^2}}$$

dato che:

$$\omega = 2\pi \cdot ft_L$$

si avrà:

$$\left|V_{Out}\right| = \frac{\left|V_{In}\right|}{\sqrt{1+\left(2\pi \cdot ft_L \cdot R \cdot C\right)^2}}$$

Se ora in questa ultima relazione andiamo a sostituire il valore ft_L con quello calcolato precedentemente

$$ft_L = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

si ottiene:

$$\left|V_{Out}\right| = \frac{\left|V_{In}\right|}{\sqrt{2}}$$

e quindi in tensione :

$$\left|\frac{V_{Out}}{V_{In}}\right| \Rightarrow \left|Ao\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

mentre in dB:

$$\left|\frac{V_{Out}}{V_{In}}\right| \Rightarrow \left|Ao\right| = 20 \cdot Log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow 20 \cdot Log\left(0.707\right) = 3$$

cioè per una particolare frequenza detta ***frequenza di taglio*** [ft_L]:

$$ft_L = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

dove il rapporto tra la tensione di uscita V_{Out} e quella di ingresso V_{In} vale 3 dB.
In pratica quello che ci eravamo prefissi di dimostrare.

Dimensionamento Del Filtro Passivo (RC) Passa-Basso

Per il dimensionamento del filtro di cui alla Fig.1, è sufficiente, una volta definita la frequenza di taglio, assegnare un definito valore alla capacità C e quindi determinare il valore da attribuire alla resistenza R con l'espressione:

$$R = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot ft_L \cdot C}$$

dove ovviamente:
ft_L → espressa in Hz
C → espressa in Farad
pertanto, ponendo ad es. la frequenza di taglio ft_L = 5 kHz e la capacità C = 100 nF, il valore della R espressa in Ω è:

$$R = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow 318.3$$

La risposta in frequenza di questo filtro è simile a quella visibile in Fig. 2 (dove effettivamente la ft_L è pari ad 1 KHz).
Si noti che è ovviamente ininfluente ricavare R noti C e la frequenza di taglio, o ricavare C note la resistenza R e la stessa frequenza.
Appare, però, più semplice "*arrangiare*" il valore più opportuno di resistenza una volta attribuito un definito valore alla capacità.

Filtro Passivo (RC) Passa-Alto del 1° ordine

Fig. 3 – Filtro Passivo Passa-Alto

Un filtro passivo è un circuito costituito da resistenze e condensatori, che consente di eseguire una selezione nei confronti dei segnali applicati ai suoi ingressi in base alla frequenze dei segnali stessi, ovvero certe frequenze vengono fatte transitare dall'ingresso verso l'uscita, mentre altre vengono bloccate.
Da un esame del circuito di Fig. 3 il funzionamento di questa tipologia di filtro risulta essere molto intuitivo.
Il condensatore C si comporta come un ramo aperto per tensioni continue o a frequenza molto bassa, mentre diventa un cortocircuito per segnali a frequenza elevata.
Dunque per frequenze basse il condensatore presenta un impedenza infinita e quindi è come un circuito aperto per cui $V_{Out} \approx 0$.
Per frequenze alte C tende a diventare un cortocircuito e quindi $V_{Out} \approx V_{In} - R*I$
Dovrebbe ora essere chiaro che un filtro passa alto è un circuito che consente il passaggio di segnali a frequenza elevata, mentre blocca segnali a frequenza bassa.
Dall'analisi del circuito di Fig. 3 si può ricavare la funzione di trasferimento che, come al solito, vale il rapporto tra la tensione d'uscita e quella d'ingresso:

$$\frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{R}{R - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}}$$

Ricordando ancora che:

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}}$$

che espresso in termini logaritmici:

$$Ao_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{V_{Out}}{V_{In}}\right)$$

si avrà che il guadagno della funzione (espresso in dB) è:

$$Ao_{dB} = 20 \cdot Log\left(\frac{1}{1+\frac{1}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}}\right)$$

Il modulo di questa funzione è:

$$|Ao| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega \cdot R \cdot C)^2}}}$$

mentre la Fase (espressa in gradi) è:

$$Fase_{Ao} = \tan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}}\right)}{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}}\right)}\right)^{-1} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Nella successiva figura sono riportati i grafici di Ao_{dB} e della fase $Fase_{Ao}$ supponendo che la frequenza di taglio sia pari a 5 KHz.

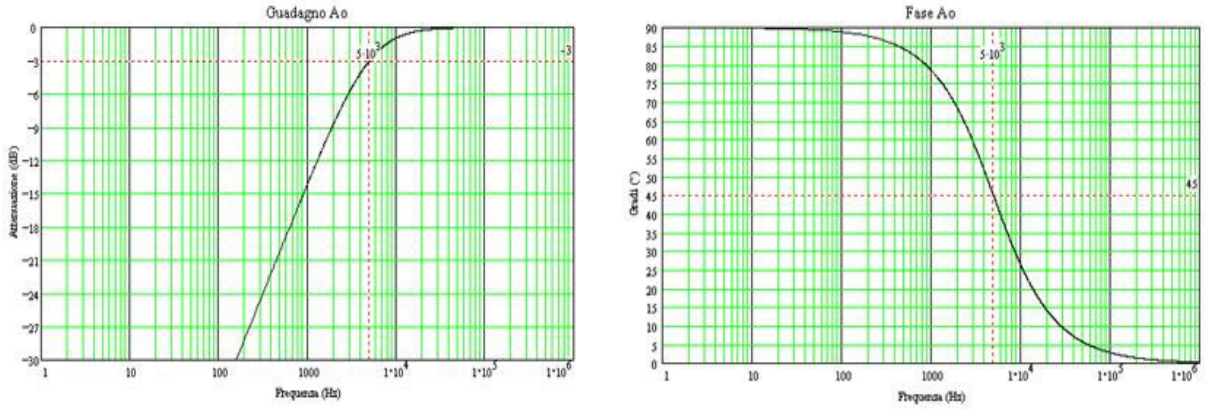


Fig. 4 – F.d.t. Guadagno e Fase relative al Filtro Passivo (RC) Passa-Alto

Anche in questo caso valgono le stesse considerazioni fatte precedentemente per il filtro passa-basso e cioè:

- La pendenza della curva, per frequenze inferiori a ft_U (frequenza di taglio) è pari a "***6 dB per ottava***" ossia ad ogni dimezzamento della frequenza la pendenza della curva decrementa di 6 dB oppure "***20 db per decade"*** e cioè, ogni qual volta la frequenza viene decrementata di 10 volte la pendenza della curva decrementa di 20 dB
- La pendenza della curva, per f = ft_U (frequenza di taglio) è attenuata di 3 dB

Da questa ultima osservazione possiamo asserire che per avere un attenuazione di 3 dB tra V_{Out} e V_{In} la frequenza deve assumere un valore pari a:

$$ft_U = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

Per la veridicità di quest'ultima relazione vedere quanto detto prima per il filtro passa-basso.
Quindi anche per il **dimensionamento del filtro passa-alto** si eseguirà lo stesso procedimento già analizzato in quello passa-basso.

Filtro Passivo (RC) Passa-Banda del 1° ordine

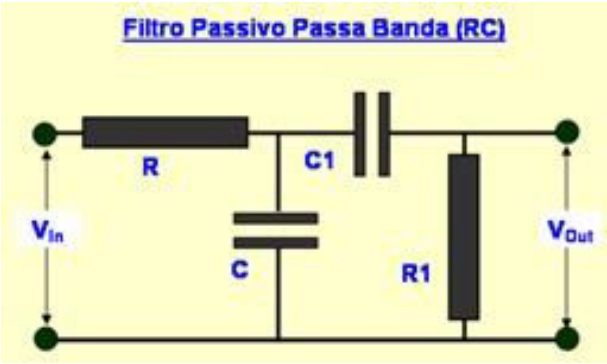


Fig. 5 – Filtro Passivo Passa-Banda

Un filtro passa banda è un dispositivo passivo che permette il passaggio di frequenze all'interno di un dato intervallo detto "***banda passante***" ed attenua le frequenze al di fuori di esso.
Un esempio di un circuito analogico che si comporta come filtro passa banda è un circuito RC visibile in Fig. 5 che altro non è una rete elettrica formata da resistenze e capacità dove l'uscita è prelevata sulla resistenza R1.
I più semplici filtri passa banda però possono anche essere creati dalla combinazione di un filtro passa basso e un filtro passa alto opportunamente dimensionati.
Il filtro passa banda ideale ha una banda passante perfettamente piatta, non ha né attenuazione né guadagno per le frequenze all'interno, e attenua completamente tutte le frequenze al di fuori di questo intervallo.
Nel caso il filtro passa banda sia costituito da un passa basso con un passa alto come quello di Fig. 5, si ipotizzi che se V_1 è la tensione ai capi di C allora si avrà che:

$$\frac{V_{In} - V_1}{R} = \frac{V_1}{Z_C} + \frac{V_1}{R_1 + Z_{C1}}$$

e conseguentemente:

$$V_{Out} = \frac{R_1}{R_1 + Z_{C1}} \cdot V_1$$

dove :

$$Z_C = \frac{1}{j\omega_1 \cdot C} \qquad Z_{C1} = \frac{1}{j\omega_2 \cdot C_1}$$

con:

$$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot ft_L \qquad \omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot ft_U$$

Calcoliamo ora la funzione di trasferimento:

$$\frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega \cdot R_1 C_1}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot R \cdot C + \frac{j\omega \cdot R \cdot C_1}{1 + j\omega \cdot R_1 C_1}}$$

Si vede che esso è il prodotto di un passa-alto e di un passa-basso con un termine misto $R*C_1$.
Se $R_1 >> R$ si può trascurare il termine misto e scrivere la funzione di trasferimento come:

$$\frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{1}{1+\frac{1}{j\omega \cdot R_1 C_1}} \cdot \frac{1}{1+j\omega \cdot R \cdot C}$$

In questo modo si vede che se ω_2 è la frequenza di taglio del passa-alto e ω_1 quella del passa-basso con $\omega_2 > \omega_1$, la "***banda passante***" B_w è data semplicemente da:

$$B_w = \omega_2 - \omega_1$$

Ricordando ancora:

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}}$$

che espresso in termini logaritmici:

$$Ao_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{V_{Out}}{V_{In}}\right)$$

si avrà che il guadagno della funzione (espresso in dB) è:

$$Ao_{dB} = 20 \cdot Log\left(\frac{1}{1+\frac{1}{j\omega \cdot R_1 C_1}} \cdot \frac{1}{1+j\omega \cdot R \cdot C}\right)$$

Il modulo di questa funzione è:

$$|Ao| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega \cdot R_1 \cdot C_1)^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\omega \cdot R \cdot C)^2}}$$

mentre la Fase (espressa in gradi) è:

$$Fase_{Ao} = \tan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{j\omega \cdot R_1 C_1}} \cdot \frac{1}{1+j\omega \cdot R \cdot C}\right)}{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{j\omega \cdot R_1 C_1}} \cdot \frac{1}{1+j\omega \cdot R \cdot C}\right)}\right)^{-1} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Nella successiva figura (Fig. 6) sono riportati i grafici di Ao_{dB} e della fase $Fase_{Ao}$ supponendo che la frequenza di taglio superiore ω_2 sia pari a 5 KHz e quella inferiore ω_1 sia pari ad 1 KHz

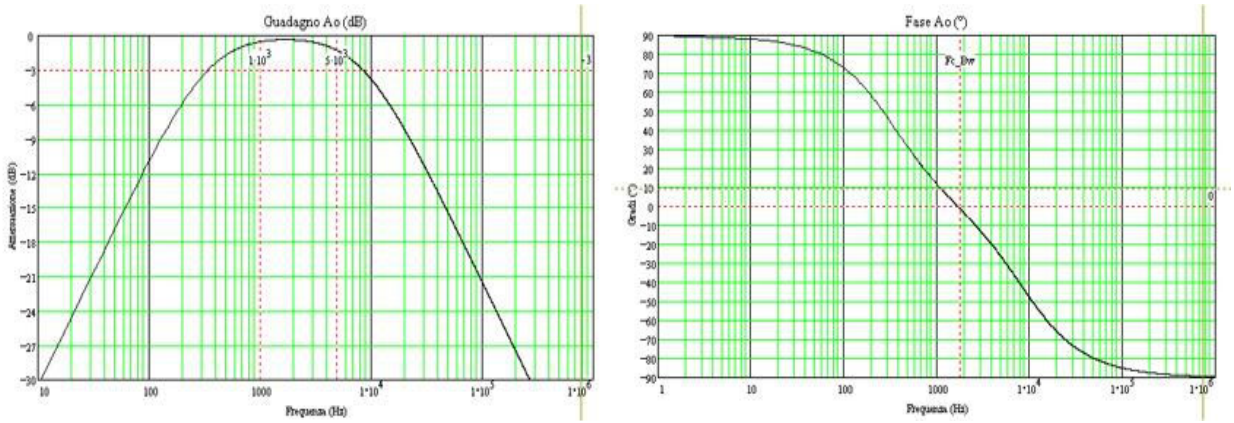


Fig. 6 – F.d.t. Guadagno e Fase relative al Filtro Passivo (RC) Passa-Banda

Dimensionamento Del Filtro Passivo (RC) Passa-Banda

Per il dimensionamento del filtro di cui alla Fig. 5 (praticamente un filtro passa-basso e un filtro passa-alto), è sufficiente, una volta definita le due frequenza di taglio (inferiore per il passa-basso e superiore per il passa-alto), si assegna un definito valore alle capacità C e C_1 e quindi si determina il valore da attribuire alla resistenze R e R_1 mediante le due relazioni:

$$R = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot ft_L \cdot C} \qquad R_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot ft_U \cdot C_1}$$

dove ovviamente:
ft_L e ft_U → espresse in Hz
C e C_1 → espresse in Farad

pertanto, definendo che il filtro:

- passa-basso abbia ft_L = 1 kHz si sceglie C = 330 nF
- passa-alto con ft_U = 5 kHz si sceglie C_1 = 100 nF

il valore delle due resistenze R e R_1 (espresse in Ω) sarà:

$$R = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 330 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow 96.5$$

$$R_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow 1592$$

La risposta in frequenza di questo filtro è quella visibile in Fig. 6.
Come già precedentemente detto, è ovviamente, ininfluente ricavare R noti C e la frequenza di taglio, o ricavare C note la resistenza R e la stessa frequenza.
Appare, però, più semplice "*arrangiare*" il valore più opportuno di resistenza una volta attribuito un definito valore alla capacità.

Filtro Passivo (LC) Passa-Basso a "k" Costante

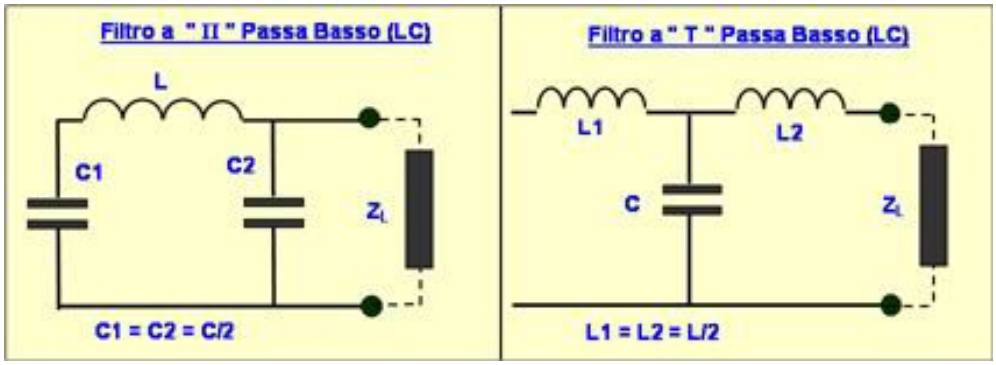


Fig. 7 - Filtro LC Passa-Basso tipo "Π" e "T" a "k" costante

Questo tipo di filtro è un filtro del 3° Ordine la cui curva di risposta in frequenza è riportata in Fig. 8. Si può constatare come ricorrendo a questo circuito (frequenza di taglio ft_L = 1 MHz e impedenza di carico Z_L = 50 **Ω**), la curva di attenuazione in banda interdetta abbia una pendenza di 60 dB per decade (tipica dei filtri del 3° Ordine).
Dalla Fig. 9 si evidenzia che questa tipologia filtro alla frequenza di taglio ft_L = 1 MHz presenta un'attenuazione, di 6 dB, il che significa che ad un segnale Vi di ingresso, ad es. di 2 V picco a picco, il filtro risponderà con un segnale Vo di uscita con ampiezza da picco a picco pari a 1 V (a 6 dB corrisponde, infatti, un'attenuazione di circa il 50%).

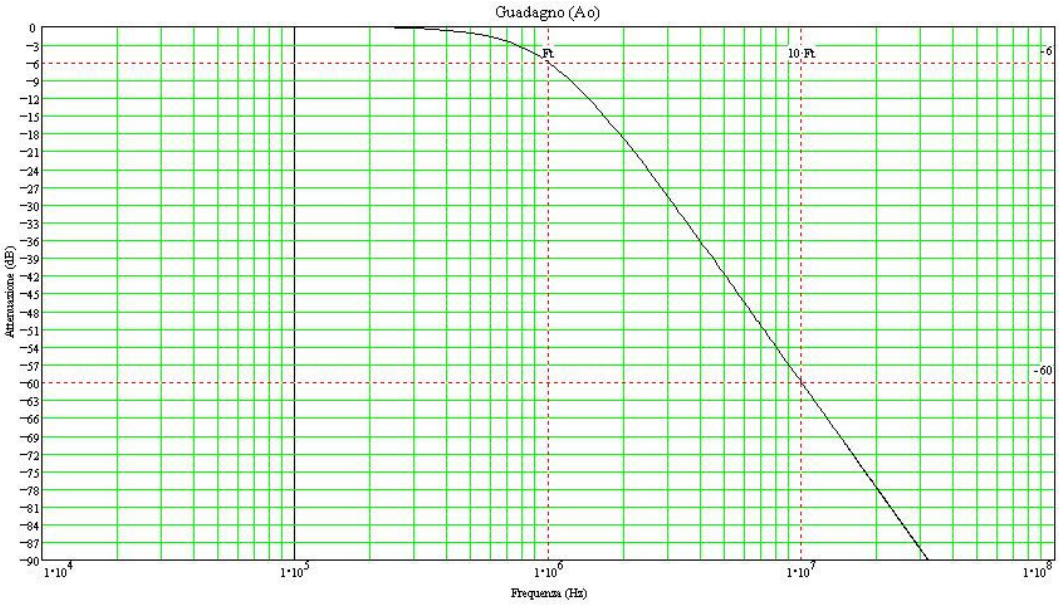


Fig. 8 - F.d.t. Guadagno Filtro LC Passa-Basso tipo "Π" e "T" a "k" costante

I filtri della Fig. 7 si definiscono, per la loro struttura caratteristica, filtro a Π e a T.
Si può constatare come, in ambedue i casi, si tratti di un quadripolo simmetrico, per il quale sono pertanto eguali le "***Impedenze Immagine***" e quindi può essere ridisegnato nella maniera più generale come illustrato in Fig. 9.

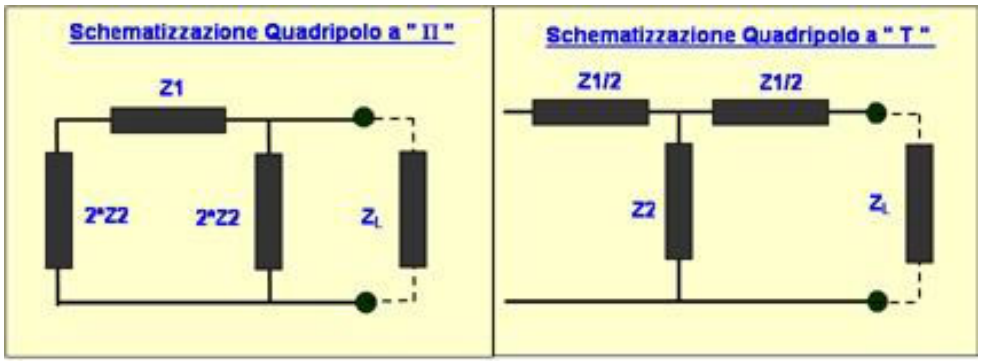


Fig. 9 - Schematizzazione filtro Passa-Basso tipo "Π" e "T"

Si può dimostrare che, per questo filtro, vale la relazione:

$$\sqrt{Z1 \cdot Z2} = k = Z_L$$

Il filtro in oggetto si definisce, infatti, a k costante dal momento che il primo membro dell'espressione si mantiene costante per tutte le frequenze e pari alla resistenza Z_L di carico (impedenza caratteristica del filtro) su cui si chiude il filtro stesso.
Ciò perché le impedenze Z1 e Z2 sono reattive e di segno opposto:

- Z1 è induttiva
- Z2 è capacitiva.

Per dimostrare quanto vale la Impedenza Immagine si può utilizzare indifferentemente uno dei due dipoli presenti in Fig. 9 per cui utilizzeremo quello a **Π**

Si dimostra che l'ingresso vede la stessa impedenza di carico Z_L se quest'ultima è la media geometrica tra l'impedenza di ingresso con l'uscita in corto circuito Zcc e quella di ingresso con l'uscita aperta Za.

$$Zimmagine = \sqrt{Zcc \cdot Za}$$

dove:

$$Zcc = \frac{Z1 \cdot 2 \cdot Z2}{Z1 + 2 \cdot Z2} \qquad Za = \frac{2 \cdot Z2 \cdot (Z1 + 2 \cdot Z2)}{2 \cdot Z2 + Z1 + 2 \cdot Z2} = \frac{2 \cdot Z2 \cdot (Z1 + 2 \cdot Z2)}{Z1 + 4 \cdot Z2}$$

Andiamo a sostituire queste due relazioni in quella della Zimmagine, si ottiene dopo qualche passaggio ed opportune semplificazioni:

$$Zimmagine = \sqrt{Z1 \cdot Z2} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{Z1}{4 \cdot Z2}}}$$

Se ora al posto di Z1 e 2*Z2 andiamo a sostituire il loro reale valore (Rif. Fig. 7) si ottiene:

$$Z1 = j \cdot \omega \cdot L \qquad 2 \cdot Z2 = \frac{1}{j \cdot \frac{\omega \cdot C}{2}} \Rightarrow Z2 = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

Questi valori trovati si vanno ad inserire nel 1° temine della Impedenza Immagine trovato precedentemente:

$$\sqrt{Z1 \cdot Z2} = \sqrt{j \cdot \omega \cdot L \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = k$$

Si vede che k non dipende dalla frequenza e che è quindi una costante (filtri a k costante) per cui si ha:

$$Zimmagine = k \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{Z1}{4 \cdot Z2}}}$$

Se ora analizziamo il termine sotto radice di questa ultima relazione si possono distinguere due casi:

<u>1°caso</u>

$$\frac{1}{1 + \frac{Z1}{4 \cdot Z2}} < 0$$

L'impedenza immagine risulta un numero immaginario.
Questo vuol dire che il bipolo visto dall'ingresso è puramente reattivo e che quindi non assorbe potenza attiva.
Non assorbendo potenza attiva non la può nemmeno trasferire al carico.
Pertanto, le frequenze per le quali questo termine è minore di 0 non arriveranno al carico e quindi avremo la massima attenuazione del segnale in uscita.

<u>2° caso</u>

$$\frac{1}{1 + \frac{Z1}{4 \cdot Z2}} > 0$$

L'impedenza immagine risulta un numero reale.

Questo vuol dire che il bipolo visto dall'ingresso è puramente ohmico e che quindi assorbe potenza attiva.
Questa potenza attiva non può restare dentro al quadripolo perché puramente reattivo e verrà quindi trasferita completamente al carico.
Pertanto solo le frequenze, per le quali questo termine è maggiore di 0, arriveranno al carico e quindi daranno luogo alla "***banda passante***".
La frequenza limite di passaggio tra la massima attenuazione del segnale in uscita e quello definito banda passante si chiama "***frequenza di taglio***".
Per calcolare la frequenza di taglio si deve porre:

$$\frac{1}{1 + \frac{Z1}{4 \cdot Z2}} = 0 \Rightarrow \; Z1 = -4 \cdot Z2$$

Sostituendo i reali termini di Z1 e Z2 in questa ultima relazione si ottiene:

$$j \cdot \omega \cdot L = -4 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4}{L \cdot C} \Rightarrow \qquad \omega = \frac{2}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Calcolo della Impedenza di Carico Z_L

Per ottenere il massimo trasferimento di potenza all'interno del quadripolo dovrei vedere dal suo ingresso una resistenza pura uguale alla resistenza interna del generatore.
Questo è impossibile a tutte le frequenze poiché la resistenza di ingresso varia con la frequenza:

$$Z_L = k \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{j \cdot \omega \cdot L}{4 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}}} = k \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{4}}}$$

Per cui, trattandosi di un filtro passa-basso, si adatta il carico alle basse frequenze e quindi se w → 0 si ha:

$$Z_L = k = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Dimensionamento del Filtro Passivo (LC) Passa-Basso a "k" Costante

Per il dimensionamento di un filtro passa-basso a k costante è necessario impostare due parametri:

- Impedenza di Carico Z_L
- Frequenza di Taglio ft_L

In base ai due parametri ed alle due successive formule (derivate dalle relazioni viste precedentemente) si ricavano i valori dell'Induttanza e della Capacità.

$$L = \frac{Z_L}{\pi \cdot ft_L} \qquad C = \frac{1}{Z_L \cdot \pi \cdot ft_L}$$

dove:
L → Valore della Induttanza (espressa in Henry)
C → Valore della Capacità (espressa in Farad)
Z_L → Impedenza Caratteristica del Filtro (espressa in **Ω**)
ft_L → Frequenza di taglio (espressa in Hz)

Nel caso si tratti di un filtro a **Π** si avranno queste condizioni:

- Z1 = L
- $Z2_A$ = C1 = C/2
- $Z2_B$ = C2 = C/2

Nel caso si tratti di un filtro a T si avranno queste condizioni:

- $Z1_A$ = L1 = L/2
- $Z1_B$ = L2 = L/2
- Z2 = C

Si supponga di voler calcolare un simile filtro la cui frequenza di taglio sia 1 MHz e la sua impedenza di carico sia 50 **Ω**.

$$L = \frac{Z_L}{\pi \cdot ft_L} \Rightarrow L = \frac{50}{3.14 \cdot 10^6} = 16 \cdot 10^{-6}$$

$$C = \frac{1}{Z_L \cdot \pi \cdot ft_L} \Rightarrow C = \frac{1}{50 \cdot 3.14 \cdot 10^6} = 6.4 \cdot 10^{-9}$$

Per cui il nostro filtro dovrà essere dimensionato con i seguenti valori:

<u>Filtro a Π:</u>

- C1 = C2 = C/2 → 3.2 nF
- L = 16 μH

<u>Filtro a T:</u>

- C = 6.4 nF
- L1 = L2 = L/2 → 8 μH

Filtro Passivo (LC) Passa-Alto a "k" Costante

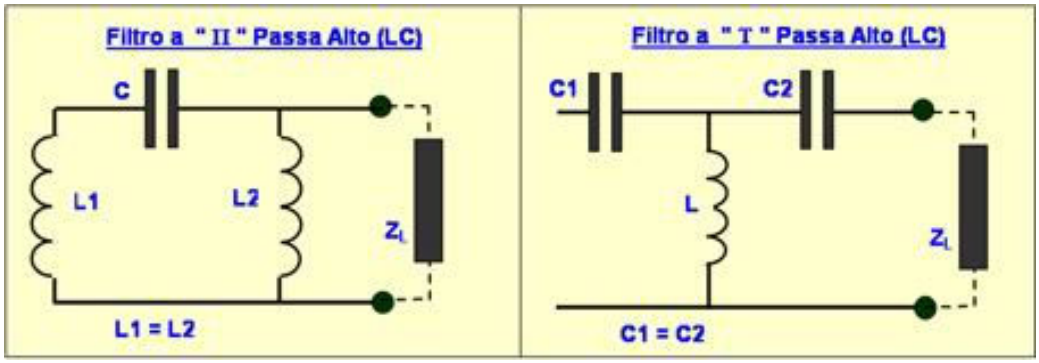


Fig. 10 - Filtro LC Passa-Alto tipo "Π" e "T" a "k" costante

Questo tipo di filtro è un filtro del 3° Ordine la cui curva di risposta in frequenza è riportata in Fig. 11. Si può constatare come ricorrendo a questo circuito (frequenza di taglio ft_L = 1 MHz e impedenza di carico Z_L = 50 **Ω**), la curva di attenuazione in banda interdetta abbia una pendenza di 60 dB per decade (tipica dei filtri del 3° Ordine).
Dalla Fig. 11 si evidenzia che questa tipologia filtro alla frequenza di taglio ft_L = 1 MHz presenta un'attenuazione, di 6 dB, il che significa che ad un segnale Vi di ingresso, ad es. di 2 V picco a picco, il filtro risponderà con un segnale Vo di uscita con ampiezza da picco a picco pari a 1 V (a 6 dB corrisponde, infatti, un'attenuazione di circa il 50%).

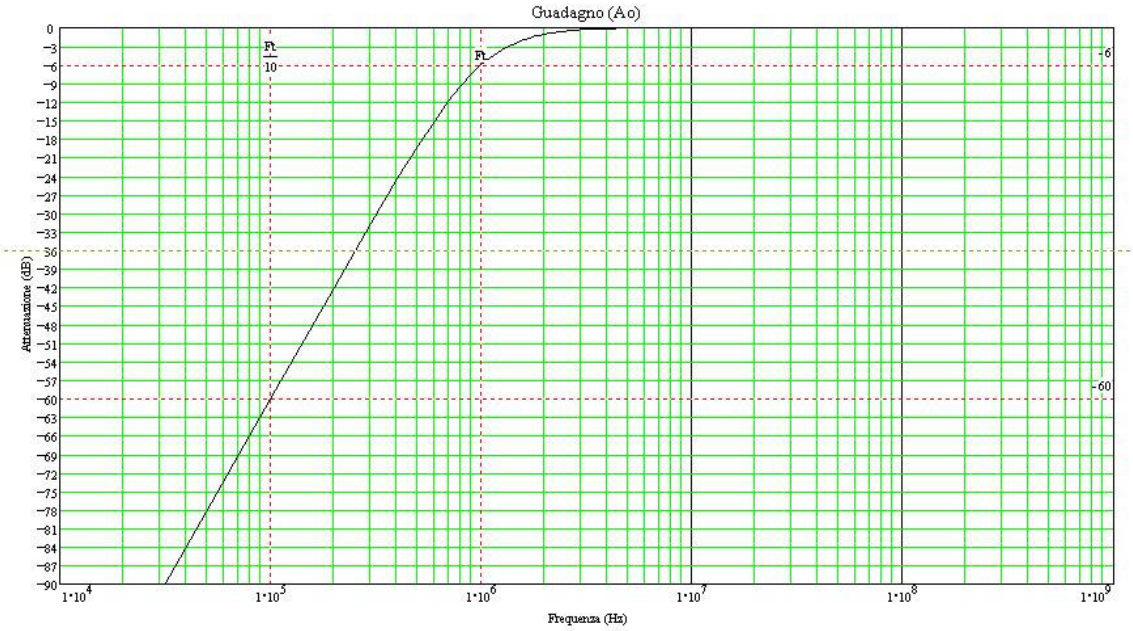


Fig. 11 – F.d.t. Guadano Filtro LC Passa-Alto tipo "Π" e "T" a "k" costante

Anche i filtri della Fig. 10 si definiscono, per la loro struttura caratteristica, filtro a Π e a T.
Si può constatare come, in ambedue i casi, si tratti di un quadripolo simmetrico, per il quale sono pertanto eguali le "***Impedenze Immagine***" e quindi può anche esso essere ricondotto nella maniera più generale come illustrato nella precedente Fig. 9.
Si può dimostrare che, per questo filtro, vale la relazione:

$$\sqrt{Z1 \cdot Z2} = k = Z_L$$

Il filtro in oggetto si definisce, infatti, a k costante dal momento che il primo membro dell'espressione si mantiene costante per tutte le frequenze e pari alla resistenza Z_L di carico (impedenza caratteristica del filtro) su cui si chiude il filtro stesso.
Ciò perché le impedenze Z1 e Z2 sono reattive e di segno opposto:

- Z1 è induttiva
- Z2 è capacitiva.

Per dimostrare quanto vale la Impedenza Immagine si può utilizzare indifferentemente uno dei due dipoli presenti in Fig. 9 per cui, visto che precedentemente si è utilizzato la configurazione a **Π,** ora utilizzeremo quella a T
Si dimostra che l'ingresso vede la stessa impedenza di carico Z_L se quest'ultima è la media geometrica tra l'impedenza di ingresso con l'uscita in corto circuito Zcc e quella di ingresso con l'uscita aperta Za.

$$Zimmagine = \sqrt{Zcc \cdot Za}$$

dove:

$$Zcc = \frac{Z1}{2} + Z2 // \frac{Z1}{2} \qquad\qquad Za = \frac{Z1}{2} + Z2$$

Andiamo a sostituire queste due relazioni in quella della Zimmagine, si ottiene dopo qualche passaggio ed opportune semplificazioni:

$$Zimmagine = \sqrt{Z1 \cdot Z2} \cdot \sqrt{1 + \frac{Z1^2}{4 \cdot Z2}}$$

Se ora al posto di Z1 e Z2 andiamo a sostituire il loro reale valore (Rif. Fig. 10) si ottiene:

$$\sqrt{Z1 \cdot Z2} = \sqrt{j \cdot \omega \cdot L \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = k$$

Si vede che k non dipende dalla frequenza e che è quindi una costante (filtri a k costante) per cui si ha:

$$Zimmagine = k \cdot \sqrt{1 + \frac{Z1}{4 \cdot Z2}}$$

Se ora analizziamo il termine sotto radice di questa ultima relazione si possono distinguere due casi:

1°caso

$$1+\frac{Z1}{4\cdot Z2}<0$$

L'impedenza immagine risulta un numero immaginario.
Questo vuol dire che il bipolo visto dall'ingresso è puramente reattivo e che quindi non assorbe potenza attiva.
Non assorbendo potenza attiva non la può nemmeno trasferire al carico.
Pertanto, le frequenze per le quali questo termine è minore di 0 non arriveranno al carico e quindi avremo la massima attenuazione del segnale in uscita.

2° caso

$$1+\frac{Z1}{4\cdot Z2}>0$$

L'impedenza immagine risulta un numero reale.
Questo vuol dire che il bipolo visto dall'ingresso è puramente ohmico e che quindi assorbe potenza attiva.
Questa potenza attiva non può restare dentro al quadripolo perché puramente reattivo e verrà quindi trasferita completamente al carico.
Pertanto solo le frequenze, per le quali questo termine è maggiore di 0, arriveranno al carico e quindi daranno luogo alla "***banda passante***".
La frequenza limite di passaggio tra la massima attenuazione del segnale in uscita e quello definito banda passante si chiama "***frequenza di taglio***".
Per calcolare la frequenza di taglio si deve porre:

$$1+\frac{Z1}{4\cdot Z2}=0\Rightarrow\ Z1=-4\cdot Z2$$

Sostituendo i reali termini di Z1 e Z2 in questa ultima relazione si ottiene:

$$\frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}=-4\cdot j\cdot\omega\cdot L\Rightarrow\omega^2=\frac{4}{L\cdot C}\Rightarrow\qquad\omega=\frac{1}{2\cdot\sqrt{L\cdot C}}$$

Da cui la frequenza di taglio ft_U:

$$ft_U=\frac{\omega}{2\cdot\pi}=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}$$

Calcolo della Impedenza di Carico Z_L

Per ottenere il massimo trasferimento di potenza all'interno del quadripolo dovrei vedere dal suo ingresso una resistenza pura uguale alla resistenza interna del generatore.
Questo è impossibile a tutte le frequenze poiché la resistenza di ingresso varia con la frequenza:

$$Z_L = k \cdot \sqrt{1 + \frac{Z1}{4 \cdot Z2}} = k \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(j \cdot \omega \cdot C) \cdot (4 \cdot j \cdot \omega \cdot L)}} = k \cdot \sqrt{\frac{1}{4 \cdot \omega^2 \cdot L \cdot C}}$$

Trattandosi di un filtro passa-alto, si adatta il carico alle alte frequenze e quindi se w → infinito si ha:

$$Z_L = k = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Dimensionamento del Filtro Passivo (LC) Passa-Alto a "k" Costante

Per il dimensionamento di un filtro passa-basso a k costante è necessario impostare due parametri:

- Impedenza di Carico Z_L
- Frequenza di Taglio ft_L

In base ai due parametri ed alle due successive formule (derivate dalle relazioni viste precedentemente) si ricavano i valori dell'Induttanza e della Capacità.

$$L = \frac{Z_L}{4 \cdot \pi \cdot ft_U} \qquad C = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot Z_L \cdot ft_U}$$

dove:

L → Valore della Induttanza (espressa in Henry)
C → Valore della Capacità (espressa in Farad)
Z_L → Impedenza Caratteristica del Filtro (espressa in **Ω**)
ft_U → Frequenza di taglio (espressa in Hz)

Nel caso si tratti di un filtro a **Π** si avranno queste condizioni:

- Z1 = C
- $Z2_A$ = L1 = L
- $Z2_B$ = L2 = L

Nel caso si tratti di un filtro a T si avranno queste condizioni:

- $Z1_A$ = C1 = C
- $Z1_B$ = C2 = C
- Z2 = L

Si supponga di voler calcolare un simile filtro la cui frequenza di taglio sia 1 MHz e la sua impedenza di carico sia 50 **Ω**.

$$L = \frac{Z_L}{4 \cdot \pi \cdot ft_U} \Rightarrow L = \frac{50}{12.56 \cdot 10^6} = 3.9 \cdot 10^{-6}$$

$$C = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot Z_L \cdot ft_U} \Rightarrow C = \frac{1}{50 \cdot 12.56 \cdot 10^6} = 1.6 \cdot 10^{-9}$$

Per cui il nostro filtro dovrà essere dimensionato con i seguenti valori:

Filtro a Π:

- C = 1.6 nF
- L1 = L2 = L → 3.9 μH

Filtro a T:

- $C1 = C2 = C \rightarrow 1.6$ nF
- $L = 3.9\ \mu H$

Filtro Passivo (LC) Passa-Banda a "k" Costante

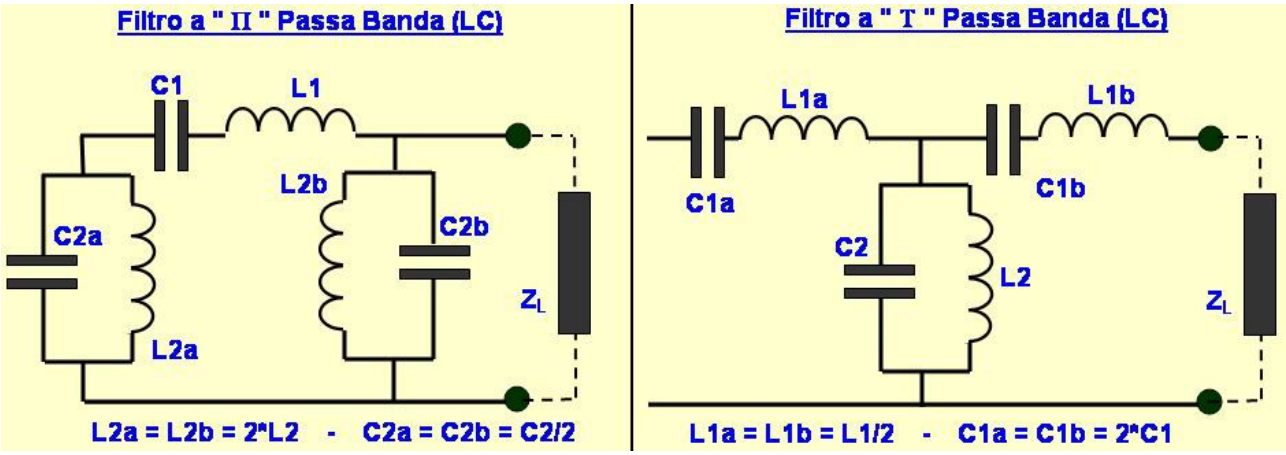


Fig. 12 - Filtro LC Passa-Banda tipo "Π" e "T" a "k" costante

Questo tipo di filtro è un filtro del 3° Ordine la cui curva di risposta in frequenza è riportata in Fig. 13. Si può constatare come ricorrendo a questo circuito (si suppongano le due frequenze di taglio ft_L = 10 MHz e ft_U = 50 MHz mentre l'impedenza di carico Z_L = 50 Ω), la curva di attenuazione in banda interdetta abbia una pendenza di 60 dB per decade (tipica dei filtri del 3° Ordine).
Dalla Fig. 13 si evidenzia che questa tipologia filtro alle 2 frequenze di taglio ft_L e ft_U presenta un'attenuazione, di 6 dB, il che significa che ad un segnale Vi di ingresso, ad es. di 2 V picco a picco, il filtro risponderà con un segnale Vo di uscita con ampiezza da picco a picco pari a 1 V (a 6 dB corrisponde, infatti, un'attenuazione di circa il 50%).

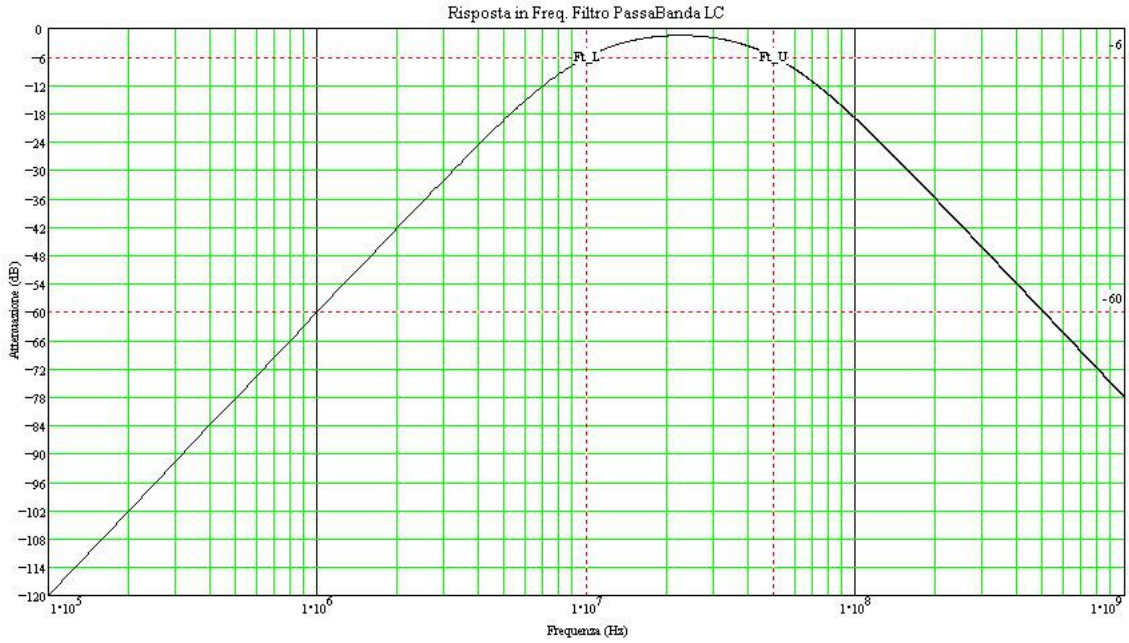


Fig. 13 F.d.t. Frequenza Filtro LC Passa-Banda tipo "Π" e "T" a "k" costante

Dimensionamento del Filtro Passivo (LC) Passa-Banda a "k" Costante

Per il dimensionamento di un filtro passa-basso a k costante è necessario impostare tre parametri:

- Impedenza di Carico Z_L
- Frequenza di Taglio Inferiore ft_L e Frequenza di Taglio Superiore ft_U

In alternativa alle frequenze di taglio devono essere definiti questi altri parametri:

- Frequenza di centro Banda F_{CB}
- Fattore di Merito "Q"

In questo secondo caso ricordando che la banda passante B_W è data dalla relazione:

$$B_W = \frac{F_{CB}}{Q}$$

Una volta nota la Banda Passante si possono ricavare le due frequenze di taglio ft_L e ft_U:

$$ft_L = F_{CB} - \frac{B_W}{2} \qquad ft_U = F_{CB} + \frac{B_W}{2}$$

In base ai tre parametri (Z_L - ft_L - ft_U) ed alle successive formule si ricavano i valori dell'Induttanze e delle Capacità.

$$L1 = \frac{Z_L}{\pi \cdot (ft_U - ft_L)} \qquad C1 = \frac{(ft_U - ft_L)}{4 \cdot \pi \cdot Z_L \cdot ft_U \cdot ft_L}$$

$$L2 = \frac{Z_L \cdot (ft_U - ft_L)}{4 \cdot \pi \cdot ft_U \cdot ft_L} \qquad C2 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot ft_U \cdot ft_L}$$

dove:

L1 e L2	→	Valore delle Induttanze (espressa in Henry)
C1 e C2	→	Valore delle Capacità (espressa in Farad)
Z_L	→	Impedenza Caratteristica del Filtro (espressa in **Ω**)
ft_U e ft_L	→	Frequenze di taglio (espressa in Hz)

Si supponga di voler calcolare un filtro LC Passa-Banda in cui le due frequenze di taglio sono:

- ft_L = 10 MHz
- ft_U = 50 MHz

mentre l'impedenza di carico Z_L = 50 **Ω**.

$$L1 = \frac{Z_L}{\pi \cdot (ft_U - ft_L)} \Rightarrow \frac{50}{3.14 \cdot (50 \cdot 10^6 - 10 \cdot 10^6)} = 3.9 \cdot 10^{-7}$$

$$C1 = \frac{(ft_U - ft_L)}{4 \cdot \pi \cdot Z_L \cdot ft_U \cdot ft_L} \Rightarrow \frac{(50 \cdot 10^6 - 10 \cdot 10^6)}{12.56 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^6} = 1.27 \cdot 10^{-10}$$

$$L2 = \frac{Z_L \cdot (ft_U - ft_L)}{4 \cdot \pi \cdot ft_U \cdot ft_L} \Rightarrow \frac{50 \cdot (50 \cdot 10^6 - 10 \cdot 10^6)}{12.56 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^6} = 3.2 \cdot 10^{-7}$$

$$C2 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot ft_U \cdot ft_L} \Rightarrow \frac{1}{12.56 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^6} = 1.6 \cdot 10^{-10}$$

In base ai valori trovati le due tipologie di filtro passa-banda verranno così dimensionate:

Filtro Passa-Banda a Π:

- L1 = 39 μH
- C1 = 12.7 nF
- L2a = L2b = 2*L2 → 64 μH
- C2a = C2b = C2/2 → 8 nF

Filtro Passa-Banda a T

- L1a = L1b = L1/2 → 19.5 μH
- C1a = C1b = 2*C1 → 25.4 nF
- L2 = 32 μH
- C2 = 16 nF

FILTRI ATTIVI

I filtri attivi si differenziano da quelli passivi per le seguenti proprietà:

- Amplificano il segnale filtrato e quindi presentano un elemento attivo (amplificatore) che permette di attribuire al segnale in uscita l'ampiezza più opportuna.
- Si può progettare il filtro indipendentemente dal carico e si possono collegare in cascata più celle filtranti senza che esse interagiscano tra di loro (i componenti attivi grazie alla loro bassa impedenza d'uscita, non risentono dell'influenza del carico).
- E' possibile evitare l'uso di induttanze (di solito usate nei circuiti a RF a frequenze elevate).
- Si ottengono filtri attivi combinando reti RC con amplificatori operazionali con una notevole diminuzione dell'ingombro e, conseguentemente, una notevole diminuzione dei disturbi di natura elettromagnetica.
- Si ha maggiore facilità nella progettazione e nella realizzazione in quanto esistono, in commercio, integrati che per il completamento del filtro richiedono solo l'aggiunta di pochi componenti.

Un filtro attivo può essere realizzato seguendo due diverse tecniche:

- A retroazione negativa multipla
- A retroazione positiva semplice detto anche "***Sallen-Key***"

Filtri Attivi A Retroazione Negativa Multipla

Dal punto di vista tecnico le sue caratteristiche sono:

- Bassa impedenza d'uscita
- Scarsa dipendenza del Q del circuito rispetto al guadagno Ao, per cui è possibile realizzare valori di Q ragionevolmente elevati (comunque Q < 15)
- Va bene per tutti i tipi di risposta (Butterworth, Bessel, Chebyshew)
- Media impedenza d'ingresso
- Richiede amplificatori operazionali con elevato guadagno ossia con comportamento molto prossimo a quello ideale

Questa tipologia di filtri sono caratterizzati da due anelli di retroazione negativa in cui il segnale entra dal morsetto negativo [–] dell'operazionale.
La figura 14 riporta la struttura base di un filtro a retroazione multipla.
Le "***Ammettenze***" Y1, Y2 … Y5 vengono specializzate, caso per caso, in "***Conduttanze Resistive***" [**1/R**], "***Suscettanze Capacitive***" [**sC**] o "***Suscettanze Induttive***" [**1/sL**] in modo da realizzare le diverse tipologie di filtri.

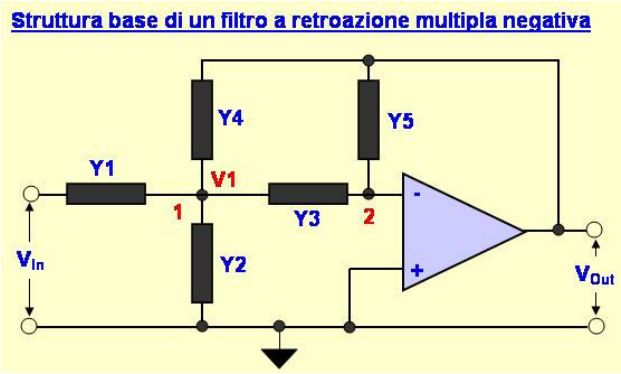


Fig. 14 - Struttura base Filtro Attivo a retrazione multipla negativa

Il nostro obiettivo è determinare la loro funzione di trasferimento e quindi, ipotizzando ideale l'operazionale del circuito in esame, possiamo considerare nulla la corrente che entra all'ingresso non invertente.
Applicando l'equazione di Kircchoff al nodo 2 (ingresso non invertente dell'operazionale) possiamo dire:

$$Y3 \cdot V1 + Y5 \cdot V_{Out} = 0 \Rightarrow V1 = -\frac{Y5}{Y3} \cdot V_{Out}$$

Applicando invece il teorema di Millman al nodo 1 si ha:

$$V1 = \frac{Y1 \cdot V_{In} + Y4 \cdot V_{Out}}{Y1 + Y2 + Y3 + Y4}$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene, dopo alcuni passaggi e semplificazioni la funzione di trasferimento generica di questo tipo di filtro:

Rel. 1) $$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{Y1 \cdot Y3}{Y3 \cdot Y4 + Y5 \cdot (Y1 + Y2 + Y3 + Y4)}$$

Mediante questa generica funzione di trasferimento si possono ottenere i diversi tipi di filtri attivi.

Filtro Passa-Basso Retroazione Negativa Multipla

La funzione di trasferimento di un filtro attivo Passa-Basso del 2° ordine (vedi figura 15) ….

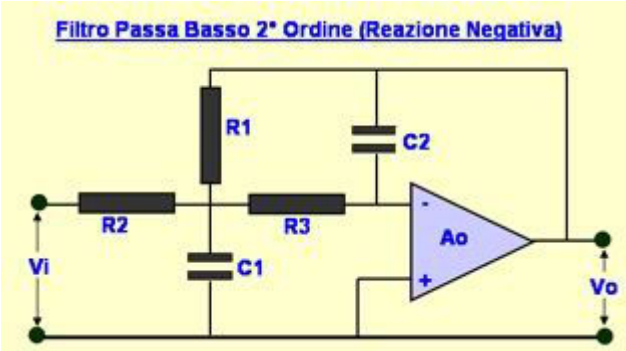


Fig. 15 Filtro Attivo Passa-Basso a retrazione multipla negativa

… si può ottenere dalla struttura base del il filtro a retroazioni multipla impostando i seguenti valori nella relazione generale (Rel. 1):

$$Y1 = \frac{1}{R2} \qquad Y2 = \frac{1}{s \cdot C1} \qquad Y3 = \frac{1}{R3} \qquad Y4 = \frac{1}{R1} \qquad Y5 = \frac{1}{s \cdot C2}$$

per cui la f.d.t. del filtro Passa-Basso sarà:

Rel. 2)

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{\dfrac{1}{R2 \cdot R3 \cdot C1 \cdot C2}}{s^2 + \dfrac{s}{C1} \cdot \left(\dfrac{1}{R1} + \dfrac{1}{R2} + \dfrac{1}{R3} \right) + \dfrac{1}{R1 \cdot R3 \cdot C1 \cdot C2}}$$

Si ricorda che:
$s \rightarrow j\omega$ $\qquad s^2 \rightarrow -\omega^2$
dove:
$\omega \rightarrow$ è pulsazione angolare corrispondente alla frequenza di taglio del filtro.

Per calcolare il guadagno [K_{WB}], che rappresenta il guadagno in tensione continua (frequenza uguale a zero), nella zona del filtro dove la banda è piatta, si pone s = 0
In questo, modo risolvendo il circuito e sostituendo ai condensatori dei circuiti aperti, si ottiene:

Rel. 3)

$$K_{WB} = \frac{R1}{R2}$$

Si ricorda ancora che una funzione di trasferimento del secondo ordine può essere anche espressa nei seguenti modi:

Rel. 4a)

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = -\frac{\omega^2 \cdot K_{WB}}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot s + \omega^2}$$

Rel. 4b) $$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = -\frac{\omega^2 \cdot K_{WB}}{s^2 + \frac{\omega}{Q} \cdot s + \omega^2}$$

dove:
ζ → il fattore di smorzamento
Q → e il fattore di qualità del circuito che è definito nel seguente modo:

Rel. 5) $$Q = \frac{1}{2 \cdot \xi}$$

Dal confronto della Rel. 2) con la Rel. 4a) e la Rel. 4b) dopo una serie di passaggi e semplificazioni si ricava:

Rel. 6) $$\frac{\omega}{Q} = \frac{1}{C1} \cdot \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3} \right)$$

Rel. 7) $$\omega^2 = \frac{1}{R3 \cdot R1 \cdot C1 \cdot C2}$$

Le relazioni 3 5 6 e 7 sono quelle che ci permettono di dimensionare il nostro filtro.

Dimensionamento del Filtro Attivo Passa-Basso a Retroazione Negativa Multipla

Il fattore di smorzamento [ζ] assume i seguenti valori a secondo si tratti di un filtro:

- tipo Chebyshew → 0.522
- tipo Butterworth → 0.707
- tipo Bessel → 0.66

Si impostano i seguenti parametri:

- C2 espresso in nF → C2 = 10 nF
- ft_L = Frequenza di taglio del filtro espressa in Hz → $ft_L = 10^4$ Hz
- G_F = Guadagno del filtro in banda piatta → $G_F = 5$

Con questi valori, ipotizzando il nostro filtro tipo Butterworth (0.707), per prima si determina il valore di ω_t espresso in radianti:

$$\omega_t = 2 \cdot \pi \cdot ft_U \Rightarrow \omega_t = 6.28 \cdot 15 \cdot 10^3 = 62.83 \cdot 10^3$$

Si calcola ora C1 in nF:

$$C1 = C2 \cdot \frac{(1 + G_F)}{\xi^2} \Rightarrow C1 = 10 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{6}{0.499} = 120 \cdot 10^{-9}$$

Quindi, successivamente, nel seguente ordine si calcolano R1 – R2 – R3 espresse in Ω:

$$R1 = \frac{\xi}{\omega_t \cdot C2} \Rightarrow R1 = \frac{0.707}{62.83 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 1125$$

$$R2 = \frac{R1}{G_F} \Rightarrow R2 = \frac{1125}{5} = 225$$

$$R3 = \frac{R1}{G_F + 1} \Rightarrow R2 = \frac{1125}{6} = 188$$

Nella successiva figura sono riportati i grafici relativi alle f.d.t. del guadagno e della fase del filtro appena dimensionato.

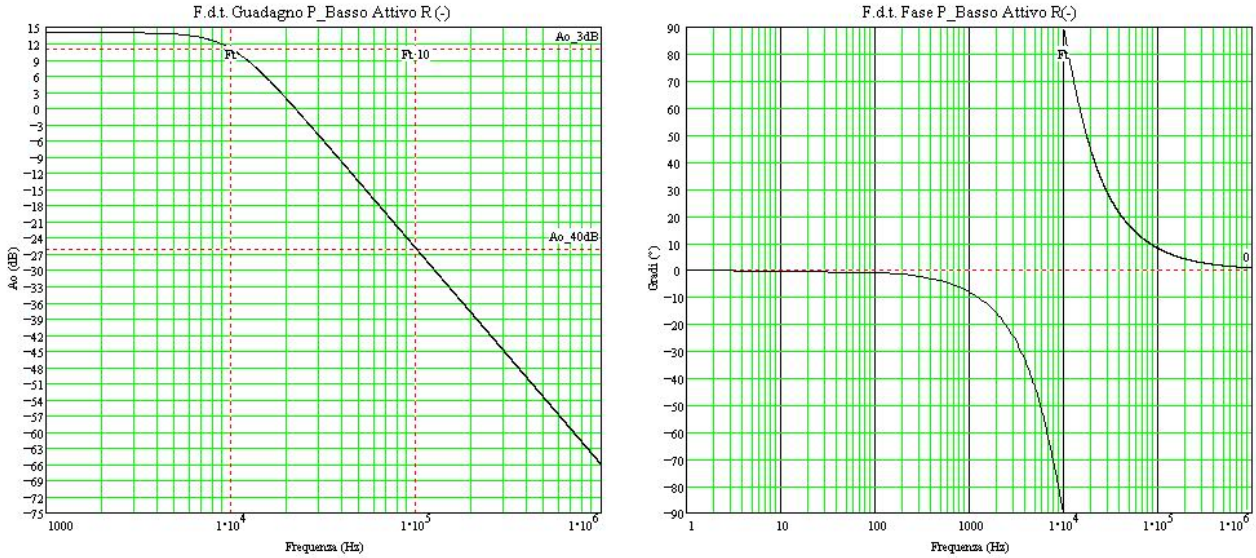


Fig. 16 - F.d.t. Guadagno e Fase di un Filtro Passa-Basso attivo a retroazione multipla negativa

Filtro Passa-Alto a Retroazione Negativa Multipla

La funzione di trasferimento di un filtro attivo Passa-Alto del 2° ordine (vedi figura 17) ….

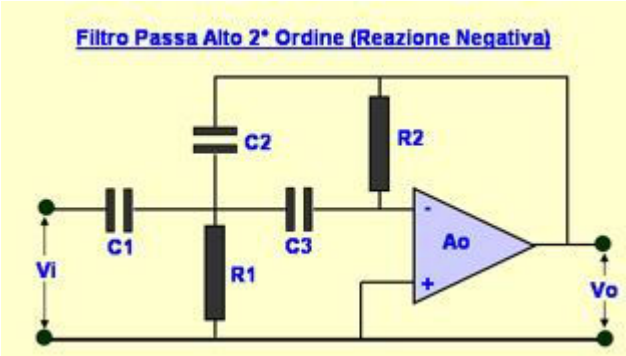


Fig. 17 - Filtro Attivo Passa-Alto a retrazione multipla negativa

… si può ottenere dalla struttura base del il filtro a retroazioni multipla impostando i seguenti valori nella relazione generale (Rel. 1):

$$Y1 = \frac{1}{s \cdot C1} \qquad Y2 = \frac{1}{R1} \qquad Y3 = \frac{1}{s \cdot C3} \qquad Y4 = \frac{1}{s \cdot C2} \qquad Y5 = \frac{1}{R2}$$

per cui la f.d.t. del filtro Passa-Alto sarà:

Rel. 8)

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{\frac{C1}{C2} \cdot s^2}{s^2 + \frac{s}{R2} \cdot \left(\frac{C1}{C1 \cdot C2} + \frac{1}{C2} + \frac{1}{C3} \right) + \frac{1}{R1 \cdot R3 \cdot C2 \cdot C3}}$$

Si ricorda che:
$s \rightarrow j\omega$ $\qquad s^2 \rightarrow -\omega^2$
dove:
$\omega =$ è pulsazione angolare corrispondente alla frequenza di taglio del filtro:

Formule di progetto del Filtro Passa-Alto

Le successive relazioni sono quelle che ci permettono di dimensionare il nostro filtro.
Il guadagno [K_{WB}], nella zona del filtro dove la banda è piatta e quindi calcolato per frequenze maggiori della frequenza di taglio [ft_U], si ricava ponendo s → infinito nella Rel. 8):

Rel. 9)

$$K_{WB} = \frac{C1}{C2}$$

Il fattore di qualità del circuito [**Q**] definito nel seguente modo:

Rel. 10)

$$Q = \frac{1}{2 \cdot \xi}$$

dove:
$\zeta \rightarrow$ il fattore di smorzamento (Chebyshew o Butterworth o Bessel)

Rel. 11) $$\frac{\omega}{Q} = \frac{1}{R2} \cdot \left(\frac{C1}{C2 \cdot C3} + \frac{1}{C2} + \frac{1}{C3} \right)$$

Rel. 12) $$\omega^2 = \frac{1}{R1 \cdot R2 \cdot C2 \cdot C3}$$

Dimensionamento del Filtro Attivo Passa-Alto a Retroazione Negativa Multipla

Si impostano i seguenti parametri:

- C1 e C3 espresso in nF → C1 = C3 = 4.7 nF
- ft_U = Frequenza di taglio del filtro espressa in Hz → $ft_U = 15*10^3$ Hz
- G_F = Guadagno del filtro in banda piatta → $G_F = 5$

Con questi valori, ipotizzando il nostro filtro tipo Butterworth (0.707), per prima si determina il valore di ω_t espresso in radianti.

$$\omega_t = 2 \cdot \pi \cdot ft_U \Rightarrow \omega_t = 6.28 \cdot 15 \cdot 10^3 = 94.2 \cdot 10^3$$

Si calcola ora C2 in nF:

$$C2 = \frac{C1}{G_F} \Rightarrow C2 = \frac{4.7 \cdot 10^{-9}}{5} = 0.9 \cdot 10^{-9}$$

e, successivamente, nel seguente ordine si calcolano R1 – R2 espresse in Ω:

$$R1 = \frac{2 \cdot G_F \cdot \xi}{\omega_t \cdot C1 \cdot (2 \cdot G_F + 1)} \Rightarrow R1 = \frac{10 \cdot 0.707}{94.2 \cdot 10^3 \cdot 4.7 \cdot 10^{-9} \cdot 11} = 1451$$

$$R2 = \frac{2 \cdot G + 1}{\omega_t \cdot \xi \cdot C1} \Rightarrow R2 = \frac{11}{94.2 \cdot 10^3 \cdot 0.707 \cdot 4.7 \cdot 10^{-9}} = 17560$$

Nella successiva figura sono riportati i grafici relativi alle f.d.t. del guadagno e della fase del filtro.

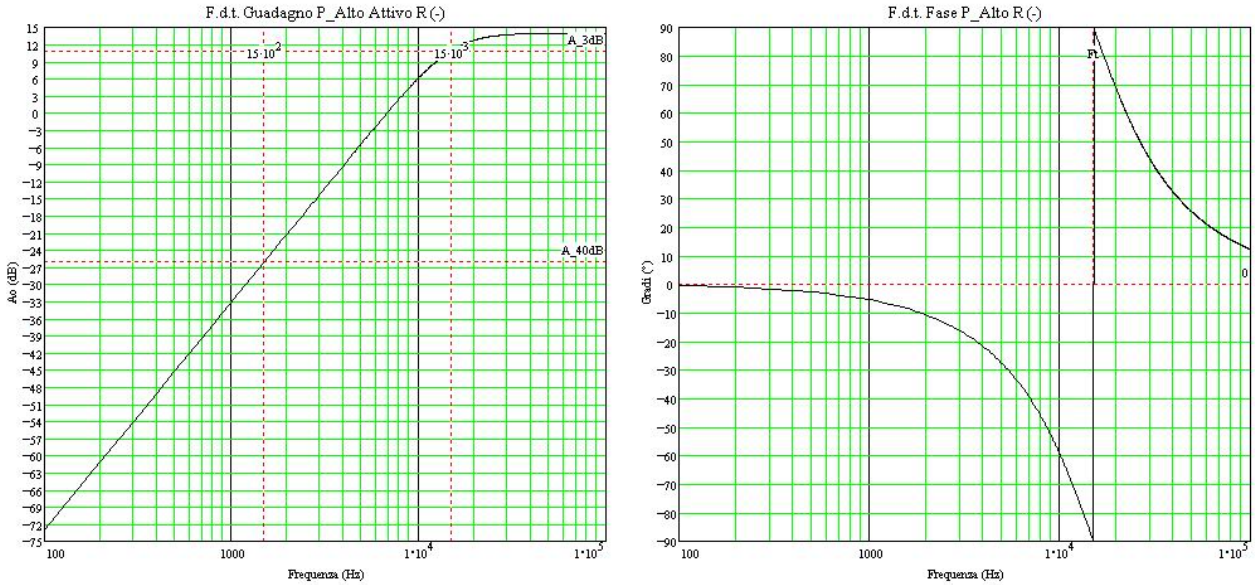


Fig. 18 - F.d.t. Guadagno e Fase di un Filtro Passa-Alto attivo a retroazione multipla negativa

Filtro Passa-Banda a Retroazione Negativa Multipla

Un filtro passa-banda presenta una banda passante tra due frequenze di taglio ft_L e ft_U in cui è rispettata la condizione $ft_U > ft_L$.
Tutte le frequenze al di fuori di questo intervallo risultano attenuate.
La funzione di trasferimento di un filtro attivo Passa-Banda del 2° ordine (vedi figura 19) ….

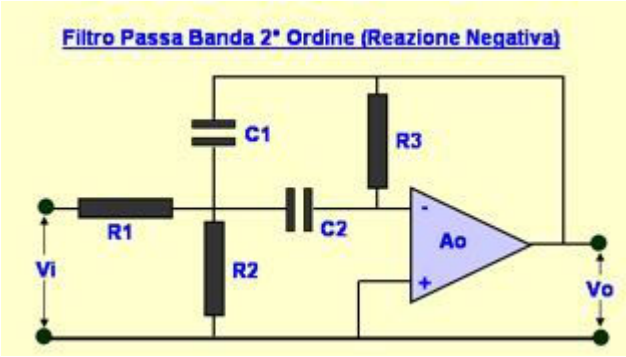


Fig. 19 - Filtro Attivo Passa-Banda a retrazione multipla negativa

… si può ottenere dalla struttura base del il filtro a retroazioni multipla impostando i seguenti valori nella relazione generale (Rel. 1):

$$Y1 = \frac{1}{R1} \qquad Y2 = \frac{1}{R2} \qquad Y3 = \frac{1}{s \cdot C2} \qquad Y4 = \frac{1}{s \cdot C1} \qquad Y5 = \frac{1}{R3}$$

per cui la f.d.t. del filtro Passa-Banda sarà:

Rel. 13)
$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{\dfrac{s}{R1 \cdot C1}}{s^2 + \dfrac{s}{R3} \cdot \left(\dfrac{1}{C1} + \dfrac{1}{C2}\right) + \dfrac{1}{R3 \cdot C1 \cdot C2} \cdot \left(\dfrac{1}{R1} + \dfrac{1}{R2}\right)}$$

Essi possono essere differenziati, in linea generale, in base al fattore di qualità Q:

- Q ≤ 10 → banda larga
- Q ≥ 10 → banda stretta

più grande è Q, più selettivo è il filtro, ovvero è minore la sua banda passante (BW).
Dunque Q fornisce una misura della selettività del filtro.
La relazione che lega Q alla banda a -3 dB è:

$$Q = \frac{\omega_{CB}}{B_W} = \frac{\omega_{CB}}{\omega_U - \omega_L}$$

Formule di progetto del Filtro Passa-Banda

Le successive relazioni sono quelle che ci permettono di dimensionare il nostro filtro.

1) La frequenza di risonanza [ω_{CB}] calcolata a centro banda:

Rel. 14) $$\omega_{CB} = \frac{1}{C \cdot \sqrt{R1 \cdot R3}}$$

2) Il fattore di qualità del circuito [**Q**] che è definito nel seguente modo:

Rel. 15) $$Q = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{R1}{R3}}$$

3) Il guadagno [$\mathbf{K_{CB}}$] calcolato a centro Banda

Rel. 16) $$K_{CB} = \frac{R3}{2 \cdot R1} = 2 \cdot Q$$

Dimensionamento del Filtro Attivo Passa-Banda a Retroazione Negativa Multipla

Si impostano i seguenti parametri:

- f_{CB} = Frequenza di centro banda espressa in Hz → $f_{CB} = 10*10^3$ Hz
- C1 e C2 espresso in nF → C1 = C2 = 10 nF
- G_F = Guadagno del filtro in banda piatta → $G_F = 5$
- Q = Coefficiente di bontà del circuito → Q = 10

Con questi valori per prima cosa si determina il valore di ω_{CB} espresso in radianti.

$$\omega_{CB} = 2 \cdot \pi \cdot ft_{CB} \Rightarrow \omega_{CB} = 6.28 \cdot 10 \cdot 10^3 = 62.8 \cdot 10^3$$

e, successivamente, nel seguente ordine si calcolano R1 – R2 – R3 espresse in Ω:

$$R1 = \frac{Q}{\omega_{CB} \cdot C1 \cdot G_F} \Rightarrow R1 = \frac{10}{62.8 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 5} = 3183$$

$$R2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{G/2}{Q^2}\right) \cdot 2 \cdot Q \cdot C1} \Rightarrow R2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2.5}{100}\right) \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 81.6$$

$$R3 = \frac{Q}{\pi \cdot f_{CB} \cdot C1 \cdot} \Rightarrow R1 = \frac{10}{3.14 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 31830$$

Nella successiva figura sono riportati i grafici relativi alle f.d.t. del guadagno e della fase del filtro.

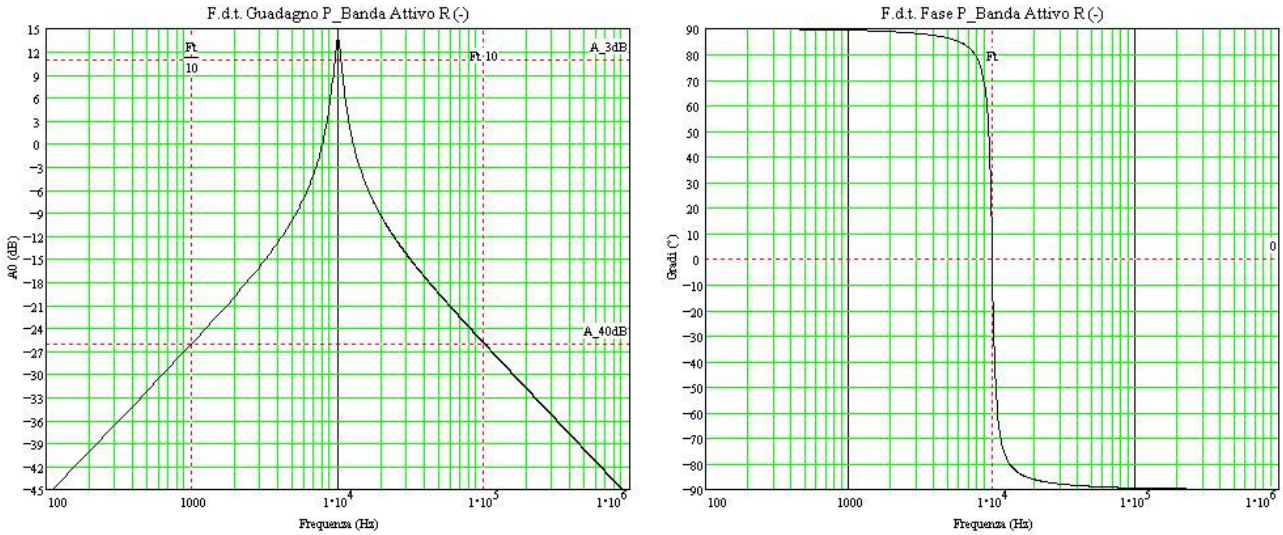


Fig. 20 - F.d.t. Guadagno e Fase di un Filtro Passa-Alto attivo a retroazione multipla negativa

Filtri Attivi A Retroazione Positiva (Sallen-Key o VCVS)

Dal punto di vista tecnico le sue principali caratteristiche sono:

- Elevata impedenza d'ingresso per la presenza della configurazione non invertente
- Bassa impedenza d'uscita
- Facile regolazione del guadagno tramite le due resistenze collegate all'ingresso invertente
- Ideale per filtri con risposta alla Butterworth
- Forte dipendenza del Q del circuito rispetto al guadagno A0, per cui l'utilizzo di questo tipo di configurazione è limitata da bassi valori di Q (1 < Q < 10) e di guadagno (<= 10)
- Sconsigliato per filtri passa-banda

Questa tipologia di filtri sono caratterizzati da un anello di retroazione sul nodo Vp (morsetto positivo [+] dell'operazionale) caratterizzato da impedenze generalizzate Z e da un anello di retroazione sul nodo Vn (morsetto negativo [-] dell'operazionale) caratterizzato da una rete tipicamente resistiva.
La figura 21 riporta la struttura base di un filtro VCVS.

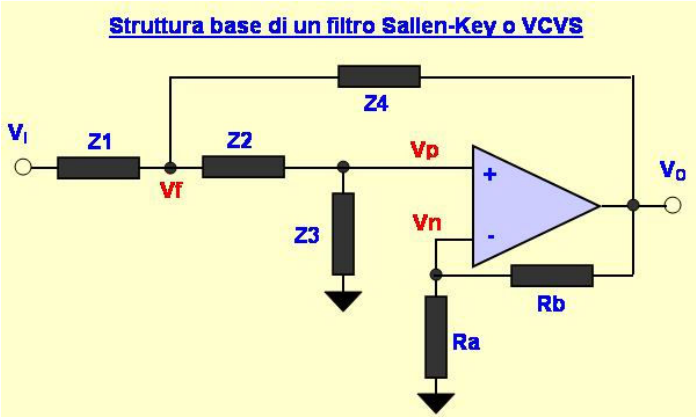


Fig. 21 Struttura base Filtro Attivo Sallen-Key (VCVS) a retrazione positiva

Le "***Impedenze***" Z1, Z2 … Z4 vengono specializzate, caso per caso, in "***Impedenze Resistive***" [**R**], "***Impedenze Capacitive***" [1/**sC**] o "***Impedenze Induttive***" [**sL**] in modo da realizzare le diverse tipologie di filtri.
Il nostro obiettivo è determinare la funzione di trasferimento di questo generico filtro e quindi, ipotizzando ideale l'operazionale del circuito in esame, possiamo calcolare le tensioni Vi, Vf, Vp, Vn nei principali nodi caratteristici del nostro filtro.

Rel. 17)

$$Vf \cdot \left(\frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z2} + \frac{1}{Z4} \right) = Vi \cdot \frac{1}{Z1} + Vp \cdot \frac{1}{Z2} + Vo \cdot \frac{1}{Z1}$$

Dato che, avendo ipotizzato ideale l'operazionale del circuito, il nodo Vp non assorbe corrente la Rel. 17) diventa:

Rel. 18)

$$Vp \cdot \left(\frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z3} \right) = Vf \cdot \frac{1}{Z2} \Rightarrow Vf = Vp \cdot \left(1 + \frac{Z2}{Z3} \right)$$

Combinando insieme le due relazioni 17 e 18 si ottiene:

Rel. 19)

$$Vp = Vi \cdot \frac{Z2 \cdot Z3 \cdot Z4}{Z2 \cdot Z3 \cdot Z4 + 2 \cdot (Z1 \cdot Z2 \cdot Z4) + Z2 \cdot Z2 \cdot Z4 + Z2 \cdot Z2 \cdot Z1} + Vo \cdot \frac{Z1 \cdot Z2 \cdot Z3}{Z2 \cdot Z3 \cdot Z4 + 2 \cdot (Z1 \cdot Z2 \cdot Z4) + Z2 \cdot Z2 \cdot Z4 + Z2 \cdot Z2 \cdot Z1}$$

Allo stesso modo per il nodo Vn si avrà:

Rel. 20)

$$Vn \cdot \left(\frac{1}{Ra} + \frac{1}{Rb} \right) = Vo \cdot \frac{1}{Rb} \Rightarrow Vn = Vo \cdot \left(\frac{Ra}{Ra + Rb} \right)$$

Ponendo ….:

(1) a(f) → Guadagno dell'amplificatore a loop aperto

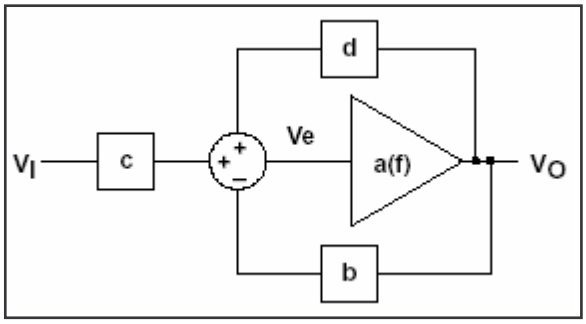
(2) $b = \frac{Ra}{Ra + Rb}$

(3) $c = \frac{Z2 \cdot Z3 \cdot Z4}{Z2 \cdot Z3 \cdot Z4 + Z1 \cdot Z2 \cdot Z4 + Z1 \cdot Z2 \cdot Z3 + Z2 \cdot Z2 \cdot Z4 + Z2 \cdot Z2 \cdot Z1}$

(4) $d = \frac{Z1 \cdot Z2 \cdot Z3}{Z2 \cdot Z3 \cdot Z4 + Z1 \cdot Z2 \cdot Z4 + Z1 \cdot Z2 \cdot Z3 + Z2 \cdot Z2 \cdot Z4 + Z2 \cdot Z2 \cdot Z1}$

(5) $Ve = Vp - Vn$

…. si ottiene il seguente circuito a blocchi:



dove:

$Vo = a(f) \cdot Ve$ e $Ve = c \cdot Vi + Vo \cdot (d - b)$

E quindi:

Rel. 21)

$$\frac{Vo}{V1} = \frac{c}{b} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{b \cdot a(f)} - \frac{d}{b}} \right)$$

Se a(f) è molto grande nella banda di frequenze del nostro filtro il 2° termine della Rel. 21) → 0, per cui la Rel. 21) si può riscrivere nel seguente modo:

Rel. 23)

$$\frac{Vo}{V1} = \frac{c}{b} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{d}{b}} \right)$$

Introducendo le seguenti costanti:

$$K = \frac{1}{b}$$
$$N1 = Z2 \cdot Z3 \cdot Z4$$
$$N2 = Z1 \cdot Z2 \cdot Z3$$
$$D = Z2 \cdot Z3 \cdot Z4 + Z1 \cdot Z2 \cdot Z4 + Z1 \cdot Z2 \cdot Z3 + Z2 \cdot Z2 \cdot Z4 + Z2 \cdot Z2 \cdot Z1$$

La Rel. 23) diventa:

Rel. 24)

$$\frac{Vo}{V1} = \frac{K}{\frac{D}{N1} - \frac{K \cdot N2}{N1}}$$

O in termini di impedenze:

Rel. 25)

$$\frac{Vo}{V1} = \frac{K}{\frac{Z1 \cdot Z2}{Z3 \cdot Z4} + \frac{Z1}{Z3} + \frac{Z2}{Z3} + \frac{Z1 \cdot (1 - K)}{Z4} + 1}$$

E' ovvio che tramite la Rel. 25), scegliendo opportunamente le Impedenze, si possono realizzare tutte le diverse tipologie di filtri che ci necessitano.

Passa-Basso A Retroazione Positiva (Sallen-Key o VCVS)

La funzione di trasferimento di un filtro attivo Passa-Basso del 2° ordine (vedi figura 22) ….

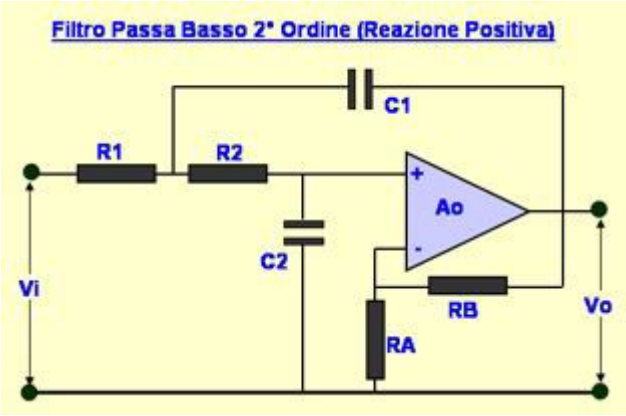


Fig. 22 - Filtro Attivo Passa-Basso Sallen-Key o VCVS

… si può ottenere dalla struttura base del il filtro a retroazione positiva VCVS impostando i seguenti valori nella relazione generale (Rel. 25):

$$Z1 = R1 \qquad Z2 = R2 \qquad Z3 = \frac{1}{s \cdot C2} \qquad Z4 = \frac{1}{s \cdot C1}$$

per cui la f.d.t. del filtro Passa-Basso sarà:

Rel. 26)

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{\dfrac{K}{R1 \cdot R2 \cdot C1 \cdot C2}}{s^2 + s \cdot \left(\dfrac{1}{R1 \cdot C1} + \dfrac{1}{R2 \cdot C1} + \dfrac{1-K}{R2 \cdot C2} \right) + \dfrac{1}{R1 \cdot R2 \cdot C1 \cdot C2}}$$

Si ricorda inoltre che la f.d.t. generale di un filtro passa-basso è:

Rel. 27)

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{K \cdot \omega^2}{s^2 + 2 \cdot s \cdot \xi \cdot \omega + \omega^2}$$

Confrontando tra loro queste ultime relazioni (26 e 27) si ottengono le formule relative ai parametri caratteristici del filtro passa-basso:

Rel. 28) $$\omega = \frac{1}{\sqrt{R1 \cdot R2 \cdot C1 \cdot C2}}$$ **Pulsazione di taglio**

Rel. 29) $$K = 1 + \frac{Ra}{Rb}$$ **Guadagno Max del filtro**

Rel. 30) $$\xi = \frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt{\frac{R2\cdot C2}{R1\cdot C1}}+\sqrt{\frac{R1\cdot C1}{R2\cdot C1}}+(1-K)\cdot\sqrt{\frac{R1\cdot C1}{R2\cdot C2}}\right]$$ **Fattore di Smorzamento**

Rel. 31) $$Q = \frac{1}{2\cdot\xi}$$ **Coefficiente di bontà**

Dimensionamento del Filtro Attivo Passa-Basso VCVS

Il fattore di smorzamento [ζ] assume i seguenti valori a secondo si tratti di un filtro:

- tipo Chebyshew → 0.522
- tipo Butterworth → 0.707
- tipo Bessel → 0.66

Si impostano i seguenti parametri:

- C1 espresso in nF → C1 = 10 nF
- ft_L = Frequenza di taglio del filtro espressa in Hz → $ft_L = 10^4$ Hz
- G_F = Guadagno del filtro in banda piatta → $G_F = 5$
- Ra espressa in Ω → Ra = 10^4 Ohm

Con questi valori, ipotizzando il nostro filtro tipo Butterworth (0.707), per prima si determina il valore di ω_t espresso in radianti e di Q (coefficiente di bontà):

$$\omega_t = 2\cdot\pi\cdot ft_U \Rightarrow \omega_t = 6.28\cdot 10^4 = 62.8\cdot 10^3$$

$$Q = \frac{1}{2\cdot\xi} \Rightarrow \frac{1}{2\cdot 0.707} = 0.707$$

Nell'ordine si calcolano Rb – R1 – R2 tutte espresse in Ω:

$$Rb = Ra\cdot(Ga-1) \Rightarrow Ra = 10^4\cdot 4 = 40\cdot 10^3$$

$$R1 = \frac{2\cdot Q}{\omega_t\cdot C1} \Rightarrow \frac{1.414}{62.8\cdot 10^3\cdot 10\cdot 10^{-9}} = 2.25\cdot 10^3$$

$$R2 = \frac{1}{2\cdot Q\cdot\omega_t\cdot C1\cdot\left(\frac{Ra}{Rb}+\frac{1}{Q^2}\right)} \Rightarrow \frac{1}{1.414\cdot 62.8\cdot 10^3\cdot 10\cdot 10^{-9}\cdot\left(\frac{10^4}{4\cdot 10^4}+\frac{1}{0.499}\right)} = 187.55$$

Ed infine C2 espresso in nF

$$C2 = C1\cdot\left(\frac{Ra}{Rb}+\frac{1}{Q^2}\right) \Rightarrow C2 = 10\cdot 10^{-9}\cdot\left(\frac{10^4}{4\cdot 10^4}+\frac{1}{0.499}\right) = 59\cdot 10^{-9}$$

Nella successiva figura sono riportati i grafici relativi alle f.d.t. del guadagno e della fase del filtro appena dimensionato.

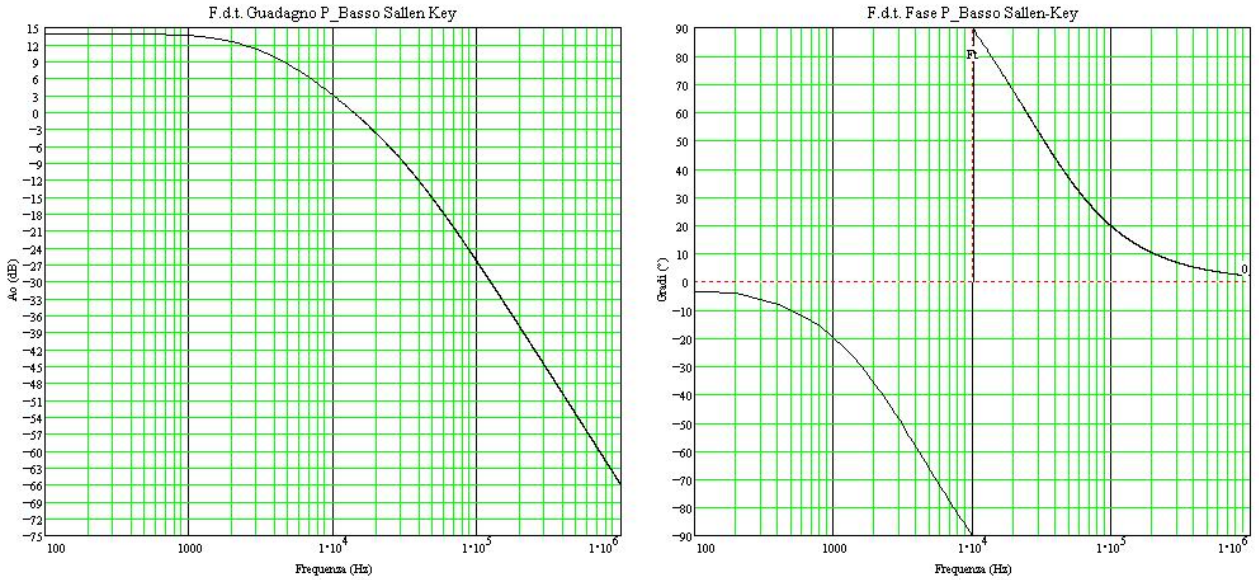


Fig. 23 - F.d.t. Guadagno e Fase di un Filtro Passa-Basso Sallen-Key o VCVS

Passa-Alto A Retroazione Positiva (Sallen-Key o VCVS)

La funzione di trasferimento di un filtro attivo Passa-Alto del 2° ordine (vedi figura 24) ….

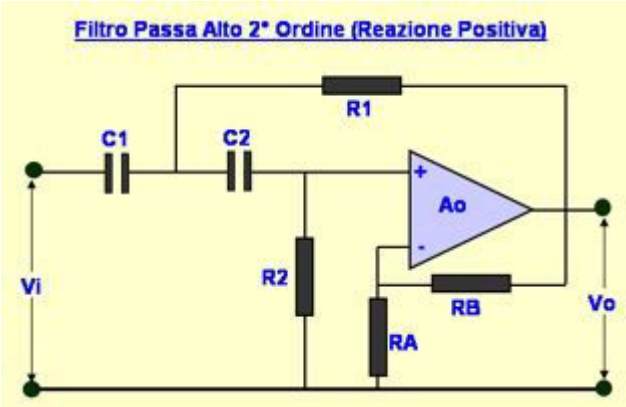


Fig. 24 - Filtro Attivo Passa-Alto Sallen-Key o VCVS

… si può ottenere dalla struttura base del il filtro a retroazione positiva VCVS impostando i seguenti valori nella relazione generale (Rel. 25):

$$Z1 = \frac{1}{s \cdot C1} \qquad Z2 = \frac{1}{s \cdot C2} \qquad Z3 = R2 \qquad Z4 = R1$$

per cui la f.d.t. del filtro Passa-Alto sarà:

Rel. 32)

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + s \cdot \left(\frac{1}{R2 \cdot C2} + \frac{1}{R2 \cdot C1} + \frac{1-K}{R1 \cdot C1} \right) + \frac{1}{R1 \cdot R2 \cdot C1 \cdot C2}}$$

Si ricorda inoltre che la f.d.t. generale di un filtro passa-alto è:

Rel. 33)

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + 2 \cdot s \cdot \xi \cdot \omega + \omega^2}$$

Confrontando tra loro queste ultime relazioni (32 e 33) si ottengono le formule relative ai parametri caratteristici del filtro passa-alto:

Rel. 34)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{R1 \cdot R2 \cdot C1 \cdot C2}}$$

Pulsazione di taglio

Rel. 35)

$$K = 1 + \frac{Ra}{Rb}$$

Guadagno Max del filtro

Rel. 36) $$\xi = \frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt{\frac{R1\cdot C1}{R2\cdot C2}}+\sqrt{\frac{R1\cdot C2}{R2\cdot C1}}+(1-K)\cdot\sqrt{\frac{R2\cdot C2}{R1\cdot C1}}\right]$$ **Fattore di Smorzamento**

Rel. 37) $$Q = \frac{1}{2\cdot\xi}$$ **Coefficiente di bontà**

Dimensionamento del Filtro Attivo Passa-Alto VCVS

Il fattore di smorzamento [ζ] assume i seguenti valori a secondo si tratti di un filtro:

- tipo Chebyshew → 0.522
- tipo Butterworth → 0.707
- tipo Bessel → 0.66

Si impostano i seguenti parametri:

- C1 e C2 espresso in nF → C1 = C2 = 10 nF
- ft_L = Frequenza di taglio del filtro espressa in Hz → $ft_L = 10^4$ Hz
- G_F = Guadagno del filtro in banda piatta → $G_F = 5$
- Ra espressa in Ω → Ra = 10^4 Ohm

Con questi valori, ipotizzando il nostro filtro tipo Butterworth (0.707), per prima si determina il valore di ω_t espresso in radianti e di Q (coefficiente di bontà):

$$\omega_t = 2\cdot\pi\cdot ft_U \Rightarrow \omega_t = 6.28\cdot 10^4 = 62.8\cdot 10^3$$

$$Q = \frac{1}{2\cdot\xi} \Rightarrow \frac{1}{2\cdot 0.707} = 0.707$$

Nell'ordine si calcolano Rb – R1 – R2 tutte espresse in Ω:

$$Rb = Ra\cdot(Ga-1) \Rightarrow Ra = 10^4\cdot 4 = 40\cdot 10^3$$

$$R1 = \frac{\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+8\cdot(Ga-1)}}{4\cdot\omega_t\cdot C1} \Rightarrow \frac{1.414+\sqrt{\frac{1}{0.499}+32}}{251.2\cdot 10^3\cdot 10\cdot 10^{-9}} = 2.883\cdot 10^3$$

$$R2 = \frac{4}{\omega_t\cdot C1\cdot\left[\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+8\cdot(Ga-1)}\right]} \Rightarrow \frac{4}{62.8\cdot 10^3\cdot 10\cdot 10^{-9}\cdot\left[\frac{1}{0.707}+\sqrt{\frac{1}{0.499}+32}\right]} = 878.7$$

Nella successiva figura sono riportati i grafici relativi alle f.d.t. del guadagno e della fase del filtro appena dimensionato.

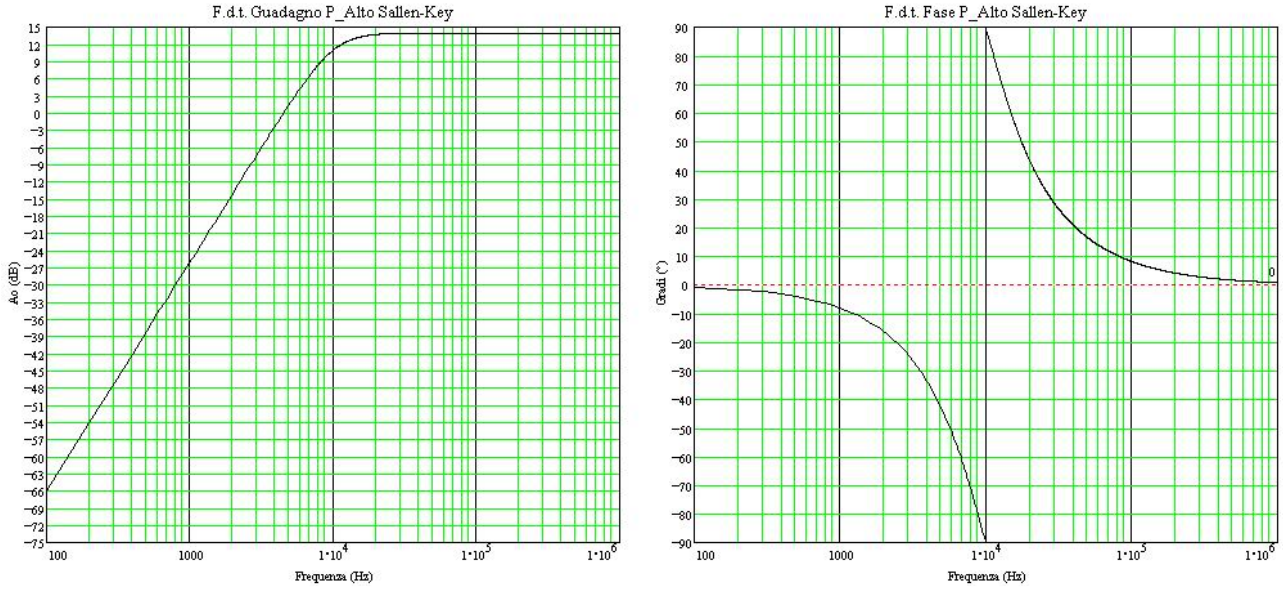


Fig. 25 - F.d.t. Guadagno e Fase di un Filtro Passa-Alto Sallen-Key o VCVS

Passa-Banda A Retroazione Positiva (Sallen-Key o VCVS)

La funzione di trasferimento di un filtro attivo Passa-Banda del 2° ordine (vedi figura 26) ….

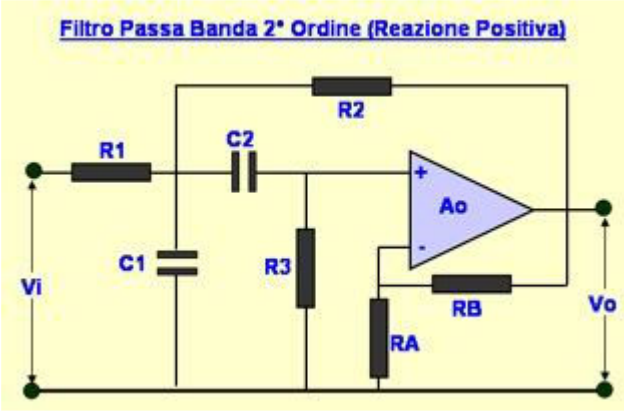


Fig. 26 Filtro Attivo Passa-Banda Sallen-Key o VCVS

… è data dalla seguente relazione:

Rel. 38)

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{A \cdot \frac{s}{R \cdot C}}{s^2 + s \cdot \frac{4 - A}{R \cdot C} + \frac{1}{(R \cdot C)^2}} \Rightarrow$$

Si ricorda inoltre che la f.d.t. generale di un filtro passa-alto è:

Rel. 39)

$$Ao = \frac{V_{Out}}{V_{In}} = \frac{A \cdot s \cdot \frac{\omega}{Q}}{s^2 + s \cdot \frac{\omega}{Q} + \omega^2}$$

dove per ambedue le relazioni A vale:

$$A = 1 + \frac{Rb}{Ra}$$

Confrontando tra loro queste ultime relazioni (38 e 39) si ottengono le formule relative ai parametri caratteristici del filtro passa-Banda:

Rel. 40) $Q = \frac{\sqrt{2}}{R \cdot C}$ **Pulsazione di taglio di Centro Banda**

Rel. 41) $K = \frac{A}{4 - A}$ **Guadagno Max del filtro**

Rel. 42) $Q = \dfrac{\sqrt{2}}{4 - A}$ **Coefficiente di bontà**

Dimensionamento del Filtro Attivo Passa-Banda VCVS

Il fattore di smorzamento [ζ] assume i seguenti valori a secondo si tratti di un filtro:

- tipo Chebyshew → 0.522
- tipo Butterworth → 0.707
- tipo Bessel → 0.66

Si impostano i seguenti parametri:

- C1 e C2 espresso in nF → C1 = C2 = 10 nF
- ft_L = Frequenza di taglio del filtro espressa in Hz → $ft_L = 10^4$ Hz
- Q = Coeff. Di Bontà o Merito → Q = 2
- Ra espressa in Ω → Ra = 10^4 Ohm

Con questi valori, ipotizzando il nostro filtro tipo Butterworth (0.707), per prima si determina il valore di ω_t espresso in radianti e di Ga (Guadagno del nostro Filtro):

$$\omega_t = 2 \cdot \pi \cdot ft_U \Rightarrow \omega_t = 6.28 \cdot 10^4 = 62.8 \cdot 10^3$$

$$Ga = \frac{4 \cdot Q - \sqrt{2}}{Q} \Rightarrow \frac{8 - 1 - 414}{2} = 3.29$$

Nell'ordine s calcolano Rb - R1 – R2 – R3 tutte espresse in Ω e imponendo R1 = R2 = R3

$$Rb = Ra \cdot (Ga - 1) \Rightarrow Ra = 10^4 \cdot 2.29 = 22.9 \cdot 10^3$$

$$R1 = \frac{\sqrt{2}}{\omega_t \cdot C1} \Rightarrow \frac{1.414}{6.28 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 2.25 \cdot 10^3$$

Nella successiva figura sono riportati i grafici relativi alle f.d.t. del guadagno e della fase del filtro appena dimensionato.

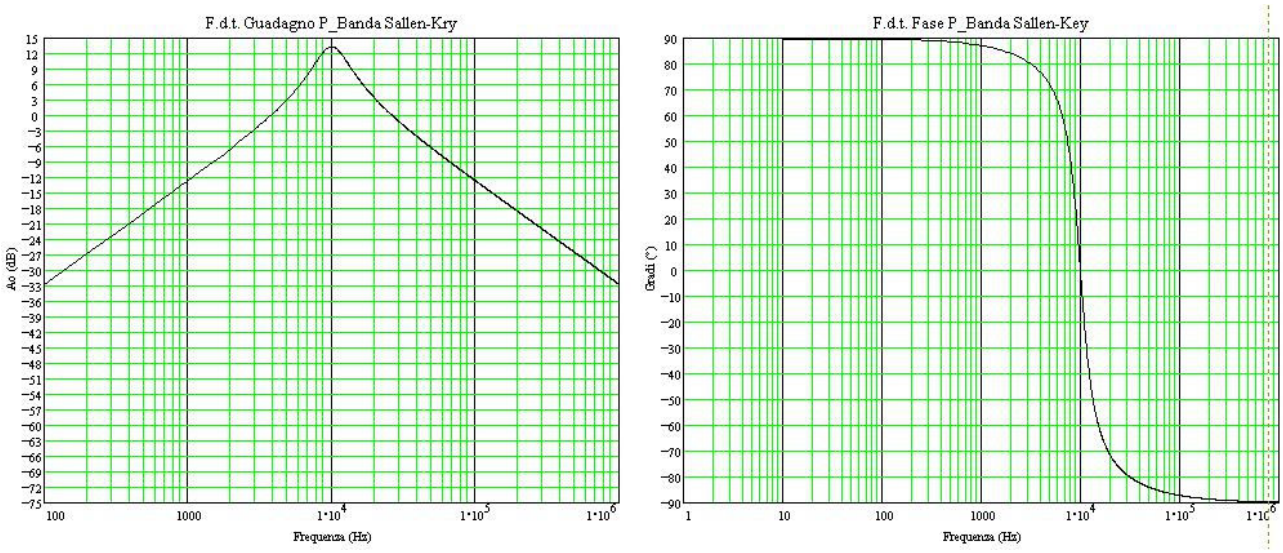


Fig. 27 - F.d.t. Guadagno e Fase di un Filtro Passa-Banda Sallen-Key o VCVS